编者的话

数学课外读物对于帮助学生学好数学，扩大他们的数学知识领域，是很有好处的．近年来，越来越多的中学学生和教师，都迫切希望出版更多的适合中学生阅读的通俗数学读物．我们约请一些数学工作者，编了这套"数学小丛书"，陆续分册出版，来适应这个要求．

这套书打算介绍一些课外的数学知识，以扩大学生的知识领域，加深对数学基础知识的掌握，引导学生独立思考，理论联系实际．

这是我们的初步想法和尝试．热切地希望数学工作者和读者对我们的工作提出宝贵的意见和建议，更希望数学工作者为中学生写出更多更好的数学课外读物．

北京市数学会

1962年4月

目　　次

一 引 言

"平均每人……."

"平均每亩……."

"这个球队队員的平均年龄……."

"某工厂的平均日产量……."

无論是听广播、看报紙或者和周围的人們交談，在日常生活中差不多每天都要遇到"平均"这样一个詞儿．每次听到或講到这两个字的时候，实际上我們都是在无意之中走近了一大堆有趣的数学問題的边緣．正是由于我們对"平均"这个詞儿太熟悉了，覺得沒有必要去进一步思索它的全部含义，所以每次接触到这些数学問題时，我們又漫不經心地离开了它們，沒有发覺到它們的存在．

其实我們很需要追究一下：为什么人們常要和"平均"这个詞儿打交道呢？

讓我們来看一些例子．

如果有人把某公社的一千亩土地中每亩的产量都告訴你，你能对这公社的生产情况作出什么結論嗎？恐怕你除了感到听得很疲倦外，什么結論也得不到．因为他告訴你的資料太瑣碎了．相反，如果他很簡单地对你說，这一千亩土地"平均"亩产多少，那你立刻可对这个公社的生产情况作出結論．同样，为了要說明某个工厂的生产情况，我們常常要用到

"平均日产量"、"平均月产量"这些名詞。

从上面的例子看来，如果要对某些事物从某些数量方面作一个概括性的了解，那么不可避免地要碰到"平均"这个概念，而在很多情况下，这种概括性的了解又是十分必要的。这或許就是我們所以常要和"平均"这詞儿打交道的原因了。

那么怎样算出上面所講的平均値呢？这个問題恐怕小学生也会回答。如果要計算一千亩土地的平均产量，只須把每亩的产量一起加起来，再用 1000 去除一下就行了。一般来說，假設已給 n 个数

$$a_1, a_2, \cdots, a_n,$$

为了計算它們的平均値，只須把这 n 个数一起加起来，再用 n 去除一下，得

$$A=\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n},$$

我們把数 A 叫做这 n 个数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 的**算术平均**.

可是我們根据什么理由，可以認为这样得出的数 A 就是我們所要求的平均値呢？原来这里边是有一层道理的。当我們定义一組数

$$a_1, a_2, \cdots, a_n$$

的平均値 x 的时候，按照我們刚才講的意思，这个平均値 x 要能反映这組数的总的情况，我們总是希望 x 和这 n 个数的偏差

$$x-a_1, x-a_2, \cdots, x-a_n$$

在总体上說来尽可能地小。也就是說，我們要适当地选取 x 值，使得平方和

$$D=(x-a_1)^2+(x-a_2)^2+\cdots+(x-a_n)^2$$

达到它的最小值．这里我們不直接把这 n 个差数本身相加，而把它們的平方相加，是因为这些差数，有些是正値，有些是負値，直接相加，就会正負相消，不能反映总体的情况．

現在我們来求使 D 取得最小值的 x 值．經过簡单的变形之后，上式可以写成：

$$D=nx^2-2(a_1+a_2+\cdots+a_n)x+(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)$$

$$=n\left[x^2-2\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}x+\left(\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\right)^2\right]$$

$$-n\left(\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\right)^2+(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)$$

$$=n\left(x-\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\right)^2-\frac{(a_1+a_2+\cdots+a_n)^2}{n}$$

$$+(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2).$$

在最后的式子中，末二项是和 x 无关的常数；只有第一項和 x 有关，而且永远不会是負数．因此只有当第一項等于零时，D 的值最小．也就是說，为了使 D 取最小值，必須有

$$x=\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$$

才行．算术平均的意义就在于此．

上面只是介紹了在我們生活中常用的計算平均值的方法．事实上，求平均的方法远不止一种，在各种不同的具体問題中，根据各种不同的具体条件，为了各种不同的具体目的，我們經常需要采用各种不同的方法去求各种不同数据的平均值．既然求平均值的方法有許多种，那么对同一組数，采用不同的方法所得平均值之間的关系又怎样呢？

在这本小書中，我們打算环繞“平均”这个概念講述一些

有趣的数学問題。

二　$H\leqslant G\leqslant A$

上面已經提到，求平均的方法不止一种。刚才我們把 n 个数相加，然后用 n 来除得到了这 n 个数的算术平均。自然我們也可把 n 个数相乘，然后把乘积开 n 次方，这样我們又得到了另一种平均，叫做这 n 个数的**几何平均**。說得詳細些，就是任給 n 个非負实数

$$a_1, a_2, \cdots, a_n,$$

我們把
$$G=\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}$$
叫做这 n 个数的几何平均。

"几何平均"这个名詞的来源可以从下述簡单的几何事实中得到解释。如图 1，我們把两个数 a_1, a_2 看成是两个綫段的长度，并以它們做边作一长方形。如果我們想作一正方形，使

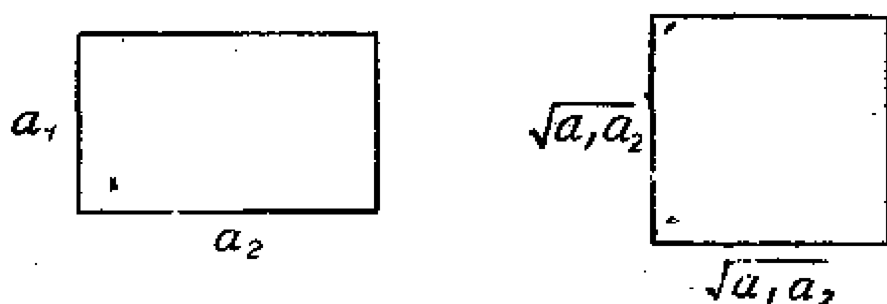


图 1.

它的面积等于长方形的面积，那么它的边长就是 a_1 和 a_2 这两个数的几何平均 $\sqrt{a_1a_2}$。

除了上面的算术平均和几何平均外，我們还可定义另外一种平均。任給 n 个正的实数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$，我們先求它

們倒数的算术平均

$$\frac{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}}{n},$$

然后再作这个平均值的倒数：

$$H=\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}},$$

这样得到的数 H 称为 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 的**調和平均**。

很容易看出，上面定义的三种平均都具有下面两个簡单性質：

(一)如果 n 个原始数据彼此相等，即

$$a_1=a_2=\cdots=a_n=a,$$

那么它們的算术平均、几何平均、調和平均也都等于 a，即

$$A=G=H=a.$$

(二)如果 n 个原始数据都界于 m 和 M 之間，即

$$m\leqslant a_i\leqslant M \quad (i=1,2,\cdots,n),$$

那么它們的算术平均、几何平均、調和平均也都界于 m 和 M 之間，即

$$m\leqslant A\leqslant M, \qquad m\leqslant G\leqslant M, \qquad m\leqslant H\leqslant M.$$

特别，如果用

$$\max(a_1,a_2,\cdots,a_n), \qquad \min(a_1,a_2,\cdots,a_n)$$

記 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 中最大的和最小的(例如 $a_1=1,a_2=3,a_3=6,a_4=5$，那么 $\max(a_1,a_2,a_3,a_4)=6$，$\min(a_1,a_2,a_3,a_4)=1$)，那么显然有

$$\min(a_1,a_2,\cdots,a_n)\leqslant a_i\leqslant\max(a_1,a_2,\cdots,a_n)\ (i=1,2,\cdots,n),$$

所以有 $$\min(a_1,a_2,\cdots,a_n)\leqslant A\leqslant\max(a_1,a_2,\cdots,a_n),$$

$$\min(a_1,a_2,\cdots,a_n)\leqslant G\leqslant\max(a_1,a_2,\cdots,a_n),$$

$$\min(a_1,a_2,\cdots,a_n)\leqslant H\leqslant\max(a_1,a_2,\cdots,a_n),$$

即一組数的算术平均、几何平均和調和平均总是夹在这組数的最大值和最小值之間。

这两个性質的証明留給讀者作練习。

定义了上述三种平均值以后，首先使我們感到关心的是这三种平均值之間的关系。它們之間哪个大些，哪个小些？或者它們間根本就不存在一定的規律：对某些数來說，A 比 G 大，而对另外一些数来說 G 又比 A 大？

为了获得启发，我們从最简单的情况研究起。先考慮只有两个数 a_1, a_2 的情形。我們知道，对任意两个实数 x 和 y，永远有不等式：

$$(x-y)^2\geqslant 0,$$

展开后卽得
$$xy\leqslant\frac{x^2+y^2}{2}. \tag{1}$$

命 $x=\sqrt{a_1}$，$y=\sqrt{a_2}$，得

$$\sqrt{a_1a_2}\leqslant\frac{a_1+a_2}{2}. \tag{2}$$

再在(1)中令 $x=\frac{1}{\sqrt{a_1}}$，$y=\frac{1}{\sqrt{a_2}}$，那就有

$$\frac{1}{\sqrt{a_1a_2}}\leqslant\frac{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}}{2},$$

取倒数郎得

$$\frac{2}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}} \leqslant \sqrt{a_1 a_2}. \qquad (3)$$

把不等式(2)、(3)联合起来便得：

$$\frac{2}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}} \leqslant \sqrt{a_1 a_2} \leqslant \frac{a_1+a_2}{2}. \qquad (4)$$

不等式(4)告訴我們，对两个数来說，算术平均最大，几何平均次之，調和平均最小。原来它們之間是有一定的規律的.

这个結論使人們有理由猜測：对任意 n 个正数来說，这样的規律——算术平均最大，几何平均次之，調和平均最小——也是存在的。

定理一 对任意 n 个正数来說，永远有

$$H \leqslant G \leqslant A.$$

証明 以 $A(a_1,a_2,\cdots,a_n)$, $G(a_1,a_2,\cdots,a_n)$, $H(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ 分别表示 n 个正数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 的算术平均、几何平均和調和平均。先証

$$G(a_1,a_2,\cdots,a_n) \leqslant A(a_1,a_2,\cdots,a_n). \qquad (5)$$

我們把証明分成两部分：先对 $n=2^m$ 这种形状的数来証明不等式(5)，然后再在这个基础上証明 n 是任何自然数的情形。

上面我們已經証明了 $n=2$ 时(5)是成立的，郎

$$G(a_1,a_2) \leqslant A(a_1,a_2),$$

由此不难推出 $n=4$ 时(5)也成立：

$$G(a_1,a_2,a_3,a_4)$$

$$=\sqrt[4]{a_1a_2a_3a_4}=\sqrt{\sqrt{a_1a_2}\sqrt{a_3a_4}}\leqslant\frac{\sqrt{a_1a_2}+\sqrt{a_3a_4}}{2}$$

$$\leqslant\frac{\frac{a_1+a_2}{2}+\frac{a_3+a_4}{2}}{2}=\frac{a_1+a_2+a_3+a_4}{4}=A(a_1,a_2,a_3,a_4).$$

同样的方法可用来証明 $n=2^m$ 时(5)的正确性。对 m 进行数学归納法。$m=1,2$ 时(5)是成立的，今設 $m=k$ 时(5)成立，則当 $m=k+1$ 时，

$$G(a_1,a_2,\cdots,a_{2^{k+1}})$$

$$=\sqrt[2^{k+1}]{a_1a_2\cdots a_{2^k}\cdot a_{2^k+1}\cdots a_{2^{k+1}}}$$

$$=\sqrt{\sqrt[2^k]{a_1a_2\cdots a_{2^k}}\sqrt[2^k]{a_{2^k+1}\cdots a_{2^{k+1}}}}$$

$$\leqslant\frac{1}{2}\left(\sqrt[2^k]{a_1a_2\cdots a_{2^k}}+\sqrt[2^k]{a_{2^k+1}\cdots a_{2^{k+1}}}\right)$$

$$\leqslant\frac{1}{2}\left(\frac{a_1+a_2+\cdots+a_{2^k}}{2^k}+\frac{a_{2^k+1}+\cdots+a_{2^{k+1}}}{2^k}\right)$$

$$=\frac{a_1+a_2+\cdots+a_{2^{k+1}}}{2^{k+1}}=A(a_1,a_2,\cdots,a_{2^{k+1}}).$$

也就是説，$m=k+1$ 时(5)成立。于是由数学归納法的原理知道，对 $n=2^m$ 形状的数，(5)是正确的。

現在假設 n 不等于 2 的冪次，我們总可以找到一个适当的自然数 r，使得 $n+r$ 是 2 的冪，就是使得

$$n+r=2^m$$

(例如，当 $n=5$ 时，可取 $r=3$，就得 $n+r=8=2^3$；当然也可取 $r=11$，使 $n+r=16=2^4$)．这样一来，对自然数 $n+r$ 来説，(5)便成立了．命

$$A=\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n},$$

那么
$$nA=a_1+a_2+\cdots+a_n,$$

为了利用刚才証明的結果，在 n 个数

$$a_1, a_2, \cdots, a_n$$

之外再补充 r 个 A，于是便得 $n+r$ 个数：

$$\underbrace{a_1, a_2, \cdots, a_n, \overbrace{A, A, \cdots A}^{r\text{个}}}_{n+r\text{个}},$$

对这 $n+r$ 个数来説，我們有：

$$\sqrt[n+r]{a_1a_2\cdots a_n\underbrace{AA\cdots A}_{r\text{个}}}\leqslant\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n+\overbrace{A+A+\cdots+A}^{r\text{个}}}{n+r}$$

$$=\frac{nA+rA}{n+r}=A,$$

不等式两边自乘 $n+r$ 次，便有：

$$a_1a_2\cdots a_nA^r\leqslant A^{n+r},$$

两端同用 A^r 除之后再开 n 次方，便得

$$\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}\leqslant A.$$

也就是説，当 n 不是 2^m 这种形式时，不等式 $G\leqslant A$ 也成立。綜合上面两段証明，便知对任何自然数 n，

$$G\leqslant A$$

永远成立。

現在再来証明不等式的第二部分

$$H\leqslant G,$$

便沒有原則性的困难了。在不等式

$$\sqrt[n]{b_1b_2\cdots b_n}\leqslant\frac{b_1+b_2+\cdots+b_n}{n}$$

中命 $b_1=\frac{1}{a_1}$, $b_2=\frac{1}{a_2}$, $\cdots$, $b_n=\frac{1}{a_n}$, 立得

$$\frac{1}{\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}}\leqslant\frac{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}}{n},$$

两边取倒数即得：

$$\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}}\leqslant\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n},$$

也就是 $$H\leqslant G.$$

定理一到这里全部証毕。

从証明的过程可以看出，定理一虽然包含两个不等式：

$$G\leqslant A \text{ 和 } H\leqslant G,$$

但証明的主要困难是在前者，后者可以从前者简单地推出。

由于这个定理的重要性，数学家們对它作出了各种各样不同的証明，这些証明体現了很多巧妙的想法。这里我們再介紹另外两个有趣的証明。

十九世紀法国大数学家哥西 (Cauchy) 利用倒推归納法的原理来証明不等式 $G\leqslant A$。

大家知道，普通的数学归納法原理是这样說的：如果

(i)命題 $P(n)$ 当 $n=1$ 時成立;

(ii)从命題 $P(n)$ 的正确性能推出命題 $P(n+1)$ 的正确性;

那么命題 $P(n)$ 便对任何自然数 n 都成立.

所謂倒推归納法却是从下面两条来推断命題 $P(n)$ 对全部自然数 n 的正确性:

(i')命題 $P(n)$ 对无穷个自然数 n 成立.

(ii')从命題 $P(n)$ 的正确性能推出命題 $P(n-1)$ 的正确性.

不等式(5)所以能用倒推归納法,那是因为我們已对 $n=2^m$ 这种形状的数証明了(5)是正确的,也就是說,我們已經对无穷个自然数

$$n=2,4,8,16,32,\cdots,2^m,\cdots$$

証明了它的正确性. 現在假定对 n 个数命題已經成立,我們要由此推出对 $n-1$ 个数命題也眞,即

$$\sqrt[n-1]{a_1a_2\cdots a_{n-1}}\leqslant\frac{a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}}{n-1}.$$

命 $$b=\frac{a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}}{n-1},$$

那么 $$a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}=(n-1)b.$$

由归納法的假定,对

$$a_1,a_2,\cdots,a_{n-1},\ b$$

这 n 个数不等式(5)是成立的,于是有

$$\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_{n-1}b}\leqslant\frac{a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}+b}{n}=\frac{(n-1)b+b}{n}=b,$$

不等式两端自乘 n 次得：

$$a_1a_2\cdots a_{n-1}\,b \leqslant b^n,$$

两端同用 b 除后再开 $n-1$ 次方，即得：

$$\sqrt[n-1]{a_1a_2\cdots a_{n-1}} \leqslant b,$$

即 $$\sqrt[n-1]{a_1a_2\cdots a_{n-1}} \leqslant \frac{a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}}{n-1}.$$

这样便完成了倒推归納法的証明。从而不等式(5)对任何自然数 n 都成立。

上面介紹的两种証法虽然在形式上不一样，但它們有共同的出发点：它們都利用了比較容易証明的事实——$n=2^m$时命题的正确性。下面要講的第三种証明却是从另一种巧妙的想法出发的。

設 $$a_1, a_2, \cdots, a_n \tag{6}$$

是已給的 n 个正数，我們要証

$$G(a_1, a_2, \cdots, a_n) \leqslant A(a_1, a_2, \cdots, a_n).$$

如果 n 个数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 彼此都相等，那么根据前面所講的性質(一)(見第7頁)知道 $G=A$，定理便无需証明了。因此不妨假定这 n 个数中至少有两个是不相等的。于是其中必有一个最大的和一个最小的，不妨設 a_1 是最大的，a_2 是最小的。这时我們有：

$$G=\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n} < \sqrt[n]{a_1a_1\cdots a_1} = a_1,$$

$$G=\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n} > \sqrt[n]{a_2a_2\cdots a_2} = a_2,$$

即 $$a_2 < G < a_1$$

或者 $$(G-a_1)(G-a_2) < 0. \tag{7}$$

現在我們把原来 n 个数

$$a_1, a_2, \cdots, a_n$$

換成一組新的数

$$a'_1, a'_2, \cdots, a'_n, \tag{6'}$$

其中

$$a'_1 = G, a'_2 = \frac{a_1 a_2}{G}, a'_3 = a_3, a'_4 = a_4, \cdots, a'_n = a_n,$$

这儿的 G 就是原来 n 个数的几何平均。設这組新数的几何平均是 G'，算术平均是 A'，那么

$$G' = \sqrt[n]{a'_1 a'_2 \cdots a'_n} = \sqrt[n]{G \cdot \frac{a_1 a_2}{G} a_3 \cdots a_n}$$

$$= \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} = G,$$

也就是說新数組的几何平均和原来的一样。为了比較新旧数組算术平均的大小，我們考虑二者的差

$$A' - A = \frac{a'_1 + a'_2 + a'_3 + \cdots + a'_n}{n} - \frac{a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n}{n}$$

$$= \frac{1}{n}(a'_1 + a'_2 - a_1 - a_2) = \frac{1}{n}\left(G + \frac{a_1 a_2}{G} - a_1 - a_2\right)$$

$$= \frac{1}{nG}\left[G^2 - (a_1 + a_2) G + a_1 a_2\right]$$

$$= \frac{1}{nG}(G - a_1)(G - a_2),$$

由(7)立得 $$A' - A < 0,$$

即 $$A' < A.$$

这說明新数組的算术平均要比原来的小。

通过上面的手續，我們从数組

$$a_1, a_2, \cdots, a_n \tag{6}$$

造出了一組新的数

$$a'_1, a'_2, \cdots, a'_n, \tag{6'}$$

这組新的数有下面三个性質：

（i）$G'=G$，卽几何平均沒有改变；

（ii）$A'<A$，卽算术平均比原来的小了；

（iii）$a'_1=G$，卽新数組中有一个数就是原来数組的几何平均。

如果新数組（6′）中的数彼此都相等，那么根据前面所講的性質(一)(見第7頁)知道：

$$G'=A',$$

再由（i）和（ii）卽得

$$G<A,$$

定理就得到了証明。因此不妨再假定(6′)中至少有两个数不一样，那么其中必有一个最大的，一个最小的。于是我們可用和上面完全一样的办法从(6′)造出另一組新数：

$$a''_1, a''_2, \cdots, a''_n, \tag{6''}$$

它們的算术平均和几何平均分別記为 A'' 和 G''。利用和上面一样的推論，易知

$$G''=G', \qquad A''<A'.$$

同时(6″)中又多了一个 G，也就是說(6″)中至少有两个数是 G 了。

同样的手續进行若干次(最多 $n-1$ 次)以后，一定可把新数組中的数全部換成 G。不妨設在第 m $(m\leqslant n-1)$ 次时已把全部数換成 G 了。这时得新数組：

$$a_1^{(m)}, a_2^{(m)}, \cdots, a_n^{(m)}. \qquad (6^{(m)})$$

分别用 $A^{(m)}$ 和 $G^{(m)}$ 記它們的算术平均和几何平均．于是我們有

$$G^{(m)} = G^{(m-1)} = \cdots = G' = G,$$
$$A^{(m)} < A^{(m-1)} < \cdots < A' < A, \qquad (8)$$

而且这时 $(6^{(m)})$ 中的 n 个数全部都是 G 了．因此

$$A^{(m)} = \frac{a_1^{(m)} + a_2^{(m)} + \cdots + a_n^{(m)}}{n} = \frac{G+G+\cdots+G}{n} = \frac{nG}{n} = G.$$

把这个結果代入（8），立刻得

$$G < A,$$

这就是我們要証的結果．

这个証明的构思是比較巧妙的．它通过造新数組的办法，把原数組逐次化簡，最后使其中所有的数都彼此相等（这时几何平均等于算术平均），而在化簡的过程中它始終使几何平均不变，而讓算术平均逐次减小，化到最后一步时，定理就显然了．这种想法可用式子表示为：

$$\begin{array}{c} G = G' = G'' = \cdots = G^{(m-1)} = G^{(m)} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \| \\ A > A' > A'' > \cdots > A^{(m-1)} > A^{(m)} \end{array}$$

根据上面这种想法，讀者不难給出这个定理的另一个証明：我們也設法化簡原数組，使它最后 n 个数彼此相等，但在化簡过程中，使它的算术平均不变，而讓几何平均逐次增大．可用式子表示为：

$$\begin{array}{c} G < G' < G'' < \cdots < G^{(m-1)} < G^{(m)} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \| \\ A = A' = A'' = \cdots = A^{(m-1)} = A^{(m)} \end{array}$$

具体的作法留給讀者作練习。

上述那种証明定理的想法在数学的其他問題中也常被用到。

定理一的不等式中还有一个問題值得研究，那就是在什么情况下等号成立的問題。显然，如果 n 个数彼此都相等，卽

$$a_1=a_2=\cdots=a_n=a,$$

那么

$$H=G=A.$$

現在的問題是，如果

$$G=A,$$

是否一定有

$$a_1=a_2=\cdots=a_n$$

呢？答案是肯定的。事实上，在定理一的最后一种証法中，我們早就得到这个結論了。

讀者不妨回忆一下：我們从

$$a_1, a_2, \cdots, a_n$$

中至少有两个数不相等的假定出发，最后得到的結論是

$$G<A,$$

因此如果已知

$$G=A$$

的話，那么当然所有的数都必須彼此相等了。綜合这两結果，定理一可完整地叙述为：对任意 n 个正数

$$a_1, a_2, \cdots, a_n$$

来說，永远有

$$H\leqslant G\leqslant A,$$

其中等号当并且只当 n 个数彼此相等，卽

$$a_1=a_2=\cdots=a_n$$

时才成立。

三 几个有趣的应用

看来似乎数学味道很浓的定理一却有不少我們意想不到的应用.

(一)如果你仔細留心一下食品店里出售的罐头食品,你会发現这些罐头的形状大部分是高和底面直径大致相等的圓柱形. 除非有特殊的原因,很难发現有細得象根棍子,或者扁得象个月餅的罐头. 你有沒有想过这是为什么? 当然,高和底面直径大致相等的圓柱形看上去比較匀称,这应該是一条理由. 但更主要的原因似乎还不在这里,而应該从我們的定理一中得到答案.

我們知道,为了存放一定量的食品,罐头的容积往往是一定的,不妨設它是 V_0. 但是容积是 V_0 的圓柱形罐头可以有各式各样的形状,它可以很长很細,也可以是很扁的. 在这各式各样的罐头中尽管容积都是一样的,但是它們的表面积却随着形状而改变. 也就是說,在同样可以存放容积是 V_0 的食品的許多罐头中,有的罐头用料較省,而有的罐头却比較费料. 显然,从节約的观点来看,我們当然应該制造用料最省的那种罐头. 那么究竟怎么样的罐头用料最省呢?

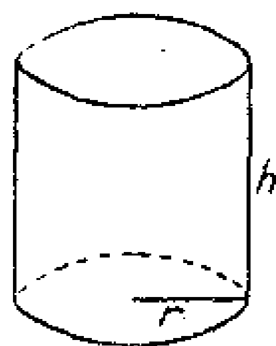


图 2.

如图 2,設罐头的高是 h,底半径是 r,由于它的容积是 V_0,所以有

$$\pi r^2 h = V_0.$$

其次,我們知道它的表面积 S 等于上

下两个底面积的和 $2\pi r^2$ 加上侧面积 $2\pi rh$，卽

$$S=2\pi r^2+2\pi rh.$$

我們的問題就是要适当地选择 r、h，使 S 有最小值．根据定理一，我們有

$$\begin{aligned}S&=2\pi r^2+2\pi rh=2\pi r^2+\pi rh+\pi rh\\&\geqslant 3\sqrt[3]{(2\pi r^2)(\pi rh)(\pi rh)}=3\sqrt[3]{2\pi(\pi r^2h)^2}\\&=3\sqrt[3]{2\pi V_0^2}=\text{常数}.\end{aligned}$$

这个不等式告訴我們，表面积永远不会比

$$3\sqrt[3]{2\pi V_0^2}$$

小，因此如果能找到适当的 r、h，使 S 的值就等于 $3\sqrt[3]{2\pi V_0^2}$，那么这个 r、h 就是我們要找的了．要找出这样的 r、h 并不困难，只要把上面不等式中的不等号变成等号就行了．刚才講过，等号成立的条件是所有的数彼此相等，在我們的問題中便有：

$$2\pi r^2=\pi rh=\pi rh,$$

由此立刻得出：
$$h=2r,$$

卽高和底面的直径应該相等．这就是我們所要的結論．

当 $h=2r$ 时，由

$$\pi r^2h=2\pi r^3=V_0,$$

可得
$$r=\sqrt[3]{\frac{V_0}{2\pi}},\quad h=\sqrt[3]{\frac{4V_0}{\pi}}.$$

根据这两个式子就可从 V_0 定出 r 和 h 的具体数值．

（二）在一张半径是 R 的圓桌的正中央上空挂一盏电灯．大家知道，灯挂得太高了，桌子边緣的亮度就小；但若挂得很低，桌子边緣处仍然是不亮的．那么究竟应該怎样选择灯的

高度，才能使桌子边緣处最亮？

我們还是用定理一来解决这問題。

如图 3，設桌子的半径是 R，灯的高度是 h，从灯射到桌子边緣的光綫和桌面成 θ 角。从物理学知道，桌子边緣一点处的照度 I 和 θ 的正弦成正比，而和这一点到光源的距离 r 的平方成反比，也就是說

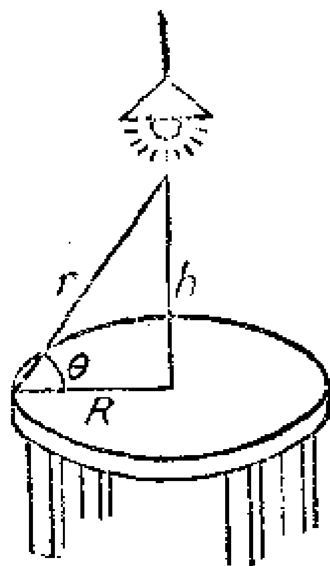


图 3.

$$I=k\frac{\sin\theta}{r^2},$$

这里 k 是一个和灯光强度有关的常数。从图上容易看出

$$r=\frac{R}{\cos\theta},$$

因此上式又可写为

$$I=\frac{k}{R^2}\sin\theta\cos^2\theta,$$

我們的問題就是要选择适当的 θ，使 I 有最大値。容易知道，使 I^2 取最大値的 θ 値也一定使 I 取最大値。因此只須求出使

$$I^2=\frac{k^2}{R^4}\sin^2\theta\cos^4\theta$$

取最大値的 θ 就行了。根据定理一，我們有：

$$\begin{aligned}I^2&=\frac{k^2}{R^4}\sin^2\theta\cos^4\theta\\&=\frac{k^2}{2R^4}(2\sin^2\theta)(\cos^2\theta)(\cos^2\theta)\\&\leqslant\frac{k^2}{2R^4}\left(\frac{2\sin^2\theta+\cos^2\theta+\cos^2\theta}{3}\right)^3\\&=\frac{4k^2}{27R^4}=\text{常数。}\end{aligned}$$

所以 I^2 永远不会超过 $\frac{4k^2}{27R^4}$. 因此要使 I^2 最大, 只須使上面不等式中的等号成立就行了. 所以有:

$$2\sin^2\theta=\cos^2\theta=\cos^2\theta,$$

由此可得 $$\operatorname{tg}^2\theta=\frac{1}{2}, \text{或 } \operatorname{tg}\theta=\frac{1}{\sqrt{2}},$$

因而 $$h=R\operatorname{tg}\theta=\frac{R}{\sqrt{2}}.$$

这就是說, 如果把灯挂在离桌面 $\frac{R}{\sqrt{2}}$ 处, 桌子边緣的亮度最大. 这个結果对你晚上看書是有現实意义的.

(三) 由半径是 R 的圓上割去一个扇形, 把剩下的部分围成一个圓錐. 显然, 这个圓錐的体积和割去的扇形的大小有关. 割的太多了, 圓錐的体积就小; 割的太少了, 圓錐的体积还是小. 請問, 究竟应該割去多大一块, 才能使所围成的圓錐有最大的体积?

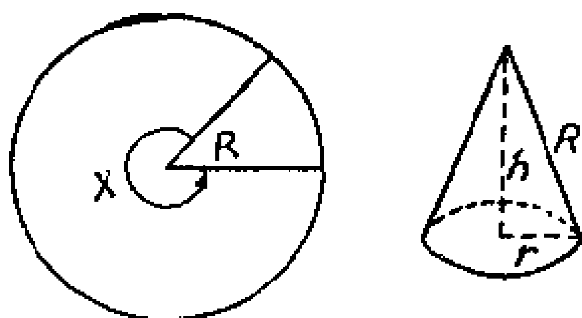


图 4.

如图 4, 命 x 表示剪剩下来的角度. 由于圓錐是由剪剩下来的部分围成的, 因此圓錐底圓的周长就等于剪剩那部分的周长, 即

$$2\pi r=xR,$$

或 $$r=\frac{Rx}{2\pi}.$$

圓錐的母綫长就是这个圓的半径 R, 所以圓錐的高

$$h=\sqrt{R^2-r^2}=\frac{R}{2\pi}\sqrt{4\pi^2-x^2}.$$

所以圆錐的体积

$$V=\frac{1}{3}h\pi r^2=\frac{1}{3}\cdot\frac{R}{2\pi}\sqrt{4\pi^2-x^2}\,\pi\left(\frac{Rx}{2\pi}\right)^2$$

$$=\frac{R^3}{24\pi^2}x^2\sqrt{4\pi^2-x^2}.$$

現在的問題就是要适当选取 x 值，使体积 V 有最大値．和上題一样的想法，只要找出使 V^2 有最大值的 x 就行了．由定理一得：

$$V^2=\frac{R^6}{576\pi^4}x^4(4\pi^2-x^2)=\frac{R^6}{1152\pi^4}x^2\cdot x^2(8\pi^2-2x^2)$$

$$\leqslant\frac{R^6}{1152\pi^4}\left[\frac{x^2+x^2+(8\pi^2-2x^2)}{3}\right]^3$$

$$=\frac{4}{243}\pi^2R^6=\text{常数},$$

也就是說 V^2 永远不超过 $\frac{4}{243}\pi^2R^6$．要使它有最大值，只要上述不等式中的等号成立，所以有：

$$x^2=x^2=8\pi^2-2x^2,$$

由此立得

$$x=2\pi\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

所以剪去的扇形的中心角应該是

$$2\pi-2\pi\sqrt{\frac{2}{3}}=2\pi\left(1-\sqrt{\frac{2}{3}}\right)\quad\text{弧度}.$$

上面三个例題都是要求在一定的条件下去寻找某个量的最大值或最小值。这一类問題統称为极大极小問題。微分学給出了解极大极小問題的一般方法。而在我們这儿反复运用定理一就可解决它們了．不过有时光用定理一似乎还嫌不够，还需另外想点办法。讓我們再来看一个例子：

(四)設有一张长 80 厘米、寬 50 厘米的长方形紙片，从它的四角各剪去一个边长是 x 的小正方形之后，可以把余下的部分做成一个沒有蓋的点心盒。請問 x 应該是多长，才能使点心盒的容积最大？

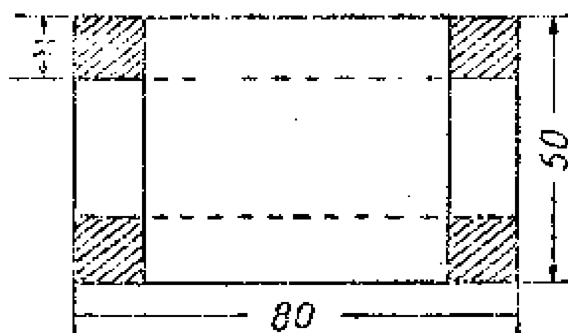


图 5.

从图 5 很容易看出，剪去四角后所得盒子的容积是

$$V=x(80-2x)(50-2x).$$

为了在不等式中消去变数 x，使不等式的右端只出現常数，我們把 V 写成

$$V=\frac{1}{4}\cdot 4x(80-2x)(50-2x),$$

把 $4x, 80-2x, 50-2x$ 看成三个数来应用定理一，得：

$$\begin{aligned}V&=\frac{1}{4}\cdot 4x(80-2x)(50-2x)\\&\leqslant\frac{1}{4}\left(\frac{4x+(80-2x)+(50-2x)}{3}\right)^3\\&=\frac{1}{4}\left(\frac{130}{3}\right)^3=\text{常数}.\end{aligned}$$

为要使 V 有最大値，只須上述不等式中的等号成立，因此有：

$$4x=80-2x=50-2x,$$

但显然这是个矛盾的方程式，由它无法解出 x 値。为此我們得另想他法。我們不妨引入一个待定的常数 k，把 V 写成

$$V=\frac{1}{k(2k+2)}[(2k+2)x][80-2x][50k-2kx]$$

$$\leqslant\frac{1}{k(2k+2)}\left[\frac{(2k+2)x+(80-2x)+(50k-2kx)}{3}\right]^3$$

$$=\frac{1}{k(2k+2)}\left(\frac{80+50k}{3}\right)^3=\text{常数}.$$

因此当 $$(2k+2)x=80-2x=50k-2kx$$

时，V有最大值。这样我們便得到了 x 所滿足的两个方程式：

$$(2k+2)x=80-2x,$$

$$(2k+2)x=50k-2kx.$$

这两个方程式分别有解：

$$x=\frac{40}{k+2},\quad x=\frac{25k}{2k+1}.$$

要使这問題有解，这两个 x 的值当然应該相等。为此只須选取 k 的值，使它滿足：

$$\frac{40}{k+2}=\frac{25k}{2k+1},$$

从这个方程式解得

$$k=2,\text{ 或 }k=-\frac{4}{5}.$$

显然，k 不能取負值，不然的話 V 中第三个因子将取負值。因此必須取 $k=2$，代入上式即得 $x=10$，这就是問題的答案。

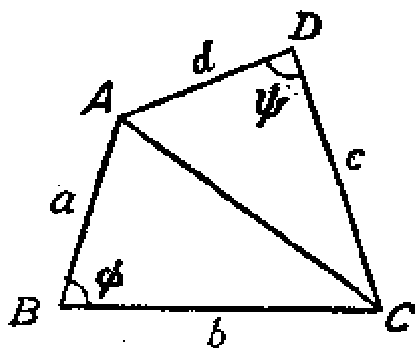


图 6.

（五）最后我們講一个有趣的几何問題：在周长是 $2l$ 的四边形中，以怎样的四边形面积

最大？

这个問題一下子是不容易回答的，但利用定理一却可以使問題得到解答。当然，这里还需要一些数学技巧。

如图 6，以 A 記四边形的面积，a,b,c,d 記它的各边的长。由题意得：

$$a+b+c+d=2l.$$

从图 6 显然可知：

$$2A=ab\ \sin\phi+cd\ \sin\psi.$$

所以

$$4A^2=a^2b^2\sin^2\phi+c^2d^2\sin^2\psi+2abcd\ \sin\phi\ \sin\psi. \qquad (1)$$

利用余弦定理計算对角綫 AC 的长度，即有

$$a^2+b^2-2ab\ \cos\phi=c^2+d^2-2cd\ \cos\psi,$$

或者 $$(a^2+b^2-c^2-d^2)^2$$

$$=4a^2b^2\cos^2\phi+4c^2d^2\cos^2\psi-8abcd\ \cos\phi\ \cos\psi. \qquad (2)$$

为了消去 ϕ 和 ψ，用 4 乘（1）然后和（2）相加，并記

$$\phi+\psi=\theta,$$

得

$$16A^2+(a^2+b^2-c^2-d^2)^2=4a^2b^2+4c^2d^2-8abcd\cos\theta$$

$$=4(ab+cd)^2-16abcd\cos^2\frac{\theta}{2},$$

或者

$$A^2=\frac{1}{16}[4(ab+cd)^2-(a^2+b^2-c^2-d^2)^2]-abcd\cos^2\frac{\theta}{2}$$

$$=\frac{1}{16}[2(ab+cd)+(a^2+b^2-c^2-d^2)][2(ab+cd)$$

$$-(a^2+b^2-c^2-d^2)]-abcd\cos^2\frac{\theta}{2}$$

$$=\frac{1}{16}[(a+b)^2-(c-d)^2][(c+d)^2-(a-b)^2]$$
$$-abcd\cos^2\frac{\theta}{2}$$
$$=\frac{1}{16}(a+b-c+d)(a+b+c-d)(c+d-a+b)(c+d+a-b)-abcd\cos^2\frac{\theta}{2}$$
$$=\frac{1}{16}(2l-2c)(2l-2d)(2l-2a)(2l-2b)-abcd\cos^2\frac{\theta}{2}$$
$$=(l-a)(l-b)(l-c)(l-d)-abcd\cos^2\frac{\theta}{2}.$$

由于 $$abcd\cos^2\frac{\theta}{2}\geqslant 0, \qquad (3)$$

所以有 $$A^2\leqslant(l-a)(l-b)(l-c)(l-d).$$

再用定理一，卽得

$$A^2\leqslant(l-a)(l-b)(l-c)(l-d)$$
$$\leqslant\left[\frac{(l-a)+(l-b)+(l-c)+(l-d)}{4}\right]^4$$
$$=\left(\frac{l}{2}\right)^4=\text{常数}. \qquad (4)$$

这就是說，四边形的面积永远不超过$(\frac{l}{2})^2$。为了使 A 有最大值，只須（3）、（4）中的等号都成立。要（3）中的等号成立，只須

$$\theta=\pi, \qquad (5)$$

要（4）中的等号成立，只須

$$l-a=l-b=l-c=l-d,$$

卽 $$a=b=c=d. \qquad (6)$$

綜合条件（5）、（6），卽知这四边形是一个正方形。于是我們



得到这样的結論：在周长一定的四边形中，以正方形的面积为最大．我們还可得到和这等价的結論：在所有面积相同的四边形中，以正方形的周长为最短．

习　题

1．設 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 都是正数，証明：

（i）如果 $x_1+x_2+\cdots+x_n=c$，那么当 $x_1=x_2=\cdots=x_n=\frac{c}{n}$ 时，乘积 $x_1x_2\cdots x_n$ 有最大值 $\left(\frac{c}{n}\right)^n$；

（ii）如果 $x_1x_2\cdots x_n=c$，那么当 $x_1=x_2=\cdots=x_n=\sqrt[n]{c}$ 时，和式 $x_1+x_2+\cdots+x_n$ 有最小值 $n\sqrt[n]{c}$．

注意　上面所举的几个应用题实际上所根据的就是这两条性質．

2．把一长为 l 的鉄絲弯成一个矩形，問怎样弯法，才能使它有最大面积？

3．証明圓內接矩形以正方形面积为最大．

4．把 16 分成四个正数之和，問怎样分法，才能使这四个数的乘积有最大值？

5．某工厂要制造一个无盖的圓柱形桶，它的容积是 $\frac{3}{2}\pi$ 立方米．用来做底的金屬每平方米 3 元，做侧面的金屬每平方米 2 元，問怎样造这圓桶，才能使成本最低？

6．問 θ $\left(0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$ 取什么值时，函数

$$y=\sin^2\theta\cos\theta$$

取最大值？

7．用篱笆围成面积是 100 平方米的矩形菜园，問篱笆至少需要多少长？

8．試証容积一定的圓錐形帐幕只有当它的高是底半徑的 $\sqrt{2}$ 倍时，所需材料最省．

四　几个簡单的不等式

不等式在高等数学中占有相当重要的地位．事实上，我們的定理一就是一个十分重要的不等式．刚才我們已經看到了它在解极值問題上所起的作用．这一节，我們将从定理一出发，推出另一些有用的不等式．

推論一　如果 n 个正数的乘积等于 1，那么它們的和一定不小于 n．即从

$$a_1a_2\cdots a_n=1,$$

可以推出

$$a_1+a_2+\cdots+a_n\geqslant n,$$

而且等号只有当

$$a_1=a_2=\cdots=a_n=1$$

时才能成立．

証明十分簡单．因为在題設的条件下，这 n 个正数的几何平均

$$G=\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}=1,$$

所以从定理一即得

$$a_1+a_2+\cdots+a_n\geqslant n.$$

等号成立的条件是显然的．

推論二　对任意 n 个正数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$，恒有

$$(a_1+a_2+\cdots+a_n)\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}\right)\geqslant n^2.$$

証明也很簡单，只要利用不等式 $H\leqslant A$，即得：

$$\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}}\leqslant\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n},$$

由此即得

$$(a_1+a_2+\cdots+a_n)\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}\right)\geqslant n^2.$$

下面我們举几个例子来說明这些不等式的用处.

例 1 設 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 是任意 n 个正数,試証:

$$a_1^n+a_2^n+\cdots+a_n^n\geqslant na_1a_2\cdots a_n.$$

証 由定理一得:

$$a_1a_2\cdots a_n=\sqrt[n]{a_1^na_2^n\cdots a_n^n}\leqslant\frac{a_1^n+a_2^n+\cdots+a_n^n}{n},$$

两端同乘以 n,即得所要証的不等式.

在上面这个不等式中分別取 $n=2,3,4,\cdots$可得:

$$a_1^2+a_2^2\geqslant 2a_1a_2,$$

$$a_1^3+a_2^3+a_3^3\geqslant 3a_1a_2a_3,$$

$$a_1^4+a_2^4+a_3^4+a_4^4\geqslant 4a_1a_2a_3a_4,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

例 2 設 $a,b,c>1$,試証:

$$\log_a b+\log_b c+\log_c a\geqslant 3.$$

証 由对数的性質,不难証明:

$$(\log_a b)(\log_b c)(\log_c a)=1.$$

所以由推論一立得所要証明的結果.

例 3 設 a,b,c,d 都是正数,試証:

$$\frac{1}{a+b+c}+\frac{1}{b+c+d}+\frac{1}{c+d+a}+\frac{1}{a+b+d}\geqslant\frac{16}{3}\,\frac{1}{a+b+c+d}.$$

証 命 $a_1=a+b+c,\quad a_2=b+c+d,$

$$a_3=c+d+a,\quad a_4=a+b+d,$$

于是

$$a_1+a_2+a_3+a_4$$
$$=(a+b+c)+(b+c+d)+(c+d+a)+(a+b+d)$$
$$=3(a+b+c+d). \qquad (1)$$

由推論二得：

$$(a_1+a_2+a_3+a_4)\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}+\frac{1}{a_4}\right)\geqslant 16. \qquad (2)$$

(1)代入(2)，得：

$$3(a+b+c+d)$$
$$\times\left(\frac{1}{a+b+c}+\frac{1}{b+c+d}+\frac{1}{c+d+a}+\frac{1}{a+b+d}\right)\geqslant 16,$$

两端同乘以$\frac{1}{3(a+b+c+d)}$，即得所要証明的結果。

例 4 設 a, b 是两任意不相等的正数，試証：

$$ab^n<\left(\frac{a+nb}{n+1}\right)^{n+1}.$$

証 据定理一：

$$\sqrt[n+1]{ab^n}=\sqrt[n+1]{a\underbrace{bb\cdots b}_{n\text{个}}}<\frac{a+\overbrace{b+\cdots+b}^{n\text{个}}}{n+1}=\frac{a+nb}{n+1}.$$

两边同乘 $n+1$ 次方，即得所要証的不等式。

例 5 試証 $x_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ 和 $y_n=\left(1-\frac{1}{n}\right)^n$ 都是递增数列，而 $z_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$ 是递减数列.

証： 先証 x_n 和 y_n 是递增的. 即要証：

$$x_n<x_{n+1},\quad y_n<y_{n+1}.$$

由例4的結果可得：

$$x_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=1\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<\left[\frac{1+n(1+\frac{1}{n})}{n+1}\right]^{n+1}$$

$$=\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1}=\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}=x_{n+1};$$

$$y_n=\left(1-\frac{1}{n}\right)^n=1\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)^n<\left[\frac{1+n(1-\frac{1}{n})}{n+1}\right]^{n+1}$$

$$=\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}=\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}=y_{n+1}.$$

再証 z_n 是递減的，卽要証：

$$z_n>z_{n+1}.$$

$$z_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}=\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1}=\frac{1}{\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}}$$

$$=\frac{1}{\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}=\frac{1}{y_{n+1}};$$

同理：
$$z_{n+1}=\frac{1}{y_{n+2}}.$$

但因 y_n 是递增的，所以 $y_{n+1}<y_{n+2}$，因而

$$\frac{1}{y_{n+1}}>\frac{1}{y_{n+2}},$$

所以得
$$z_n>z_{n+1}.$$

关于数列 x_n，还可以进一步探討一下：这个数列旣然随着 n 的增大而增大，它是否可能趋于无穷大呢？由于

$$x_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}=z_n,$$

而 z_n 是递減的，所以

$$z_n < z_1 = 4,$$

因而得 $$x_n < 4.$$

这就是說，一方面，数列 x_n 是递增的；另一方面它永远不会超过 4，因而 x_n 是一个递增而有界的数列．根据数列极限的定理，知道 x_n 一定有极限．我們用 e 来記这个极限值，即

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

数 e 在高等数学中十分重要．我們知道，中学里的对数是用 10 作底的，叫做常用对数．高等数学中的对数一般不用 10 作底，而用数 e 作底，叫做自然对数．用 e 作底时，N 的对数記作

$$\log_e N \text{ 或者 } \ln N.$$

数 e 和圓周率 π 一样，不仅是无理数，而且还是超越数，即它們都不是整系数的代数方程式的根．

利用电子計算机，人們已把这两个数算到准确到小数点后好几百位．数 e 的小数点后 15 位的值是：

$$e = 2.718281828459045\cdots$$

作为这一节的結尾，我們再介紹一个以后要用到的不等式．

定理二 設 $x > -1$，那么

(一) 当 $0 < \alpha < 1$ 时有

$$(1+x)^\alpha \leqslant 1 + \alpha x,$$

(二) 当 $\alpha < 0$ 或 $\alpha > 1$ 时有

$$(1+x)^{\alpha}\geqslant 1+\alpha x.$$

上两式中的等号当并且只当 $x=0$ 时成立。

証明 先証定理的前半部.

設 α 是一有理数，所以可表成为分数：$\alpha=\frac{m}{n}$，因 $0<\alpha<1$，所以 m,n 都是正整数，而且 $m<n$. 由假定 $x>-1$，知 $1+x>0$，所以由定理一得：

$$(1+x)^{\alpha}=(1+x)^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{(1+x)^{m}}$$

$$=\sqrt[n]{\underbrace{(1+x)\cdots(1+x)}_{m\text{个}}\cdot\underbrace{1\cdot 1\cdots 1}_{n-m\text{个}}}\leqslant\frac{m(1+x)+(n-m)}{n}$$

$$=\frac{mx+n}{n}=1+\frac{m}{n}x=1+\alpha x,$$

其中等号当并且只当 $1+x=1$ 即 $x=0$ 时才成立。

上面就 α 是有理数的情形証明了定理的前半部. 今設 α 是任何小于 1 的正实数，这时一定能得一有理数列 $r_1,r_2,\cdots,r_n,\cdots$ 无限接近 α，且 $0<r_n<1$，即

$$\lim_{n\to\infty}r_n=\alpha.$$

由于 r_n 都是有理数，所以当 $x>-1$ 时，下列不等式都成立：

$$(1+x)^{r_n}\leqslant 1+r_n x \qquad (n=1,2,\cdots).$$

于是

$$(1+x)^{\alpha}=\lim_{n\to\infty}(1+x)^{r_n}\leqslant\lim_{n\to\infty}(1+r_n x)=1+\alpha x.$$

这样就完全証明了(一).

现在再来証明定理的后半部。

先设 $\alpha>1$. 若 $1+\alpha x<0$，那么由于$(1+x)^\alpha>0$; 因此不等式

$$(1+x)^\alpha\geqslant 1+\alpha x$$

显然成立. 所以不妨设 $1+\alpha x\geqslant 0$. 由于 $\alpha>1$，所以

$0<\frac{1}{\alpha}<1$，用(一)中的结论得:

$$(1+\alpha x)^{\frac{1}{\alpha}}\leqslant 1+\frac{1}{\alpha}\cdot\alpha x=1+x,$$

两边同乘 α 次方，即得:

$$(1+x)^\alpha\geqslant 1+\alpha x.$$

最后证明 $\alpha<0$ 的情形. 我们还是设法利用(一)的结果. 因为 $\alpha<0$，所以 $-\alpha>0$. 取自然数 n，使得

$$n>\max(-\alpha,|\alpha x|).$$

于是

$$0<\frac{-\alpha}{n}<1,$$

$$\frac{|\alpha x|}{n}<1,\quad 或者\ -1<\frac{\alpha x}{n}<1.$$

因而有

$$1-\frac{\alpha x}{n}>0,\quad 1+\frac{\alpha x}{n}>0.$$

应用已证得的(一)，有

$$(1+x)^{-\frac{\alpha}{n}}\leqslant 1+\left(\frac{-\alpha}{n}\right)x=1-\frac{\alpha}{n}x,$$

或

$$(1+x)^{\frac{\alpha}{n}}\geqslant\frac{1}{1-\frac{\alpha x}{n}}\geqslant 1+\frac{\alpha}{n}x. \tag{3}$$

这是因为

$$\left(1-\frac{\alpha}{n}x\right)\left(1+\frac{\alpha}{n}x\right)=1-\left(\frac{\alpha x}{n}\right)^2\leqslant 1.$$

(3)式两边同乘 n 次方，并利用刚才证得的结果，得：

$$(1+x)^{\alpha} \geqslant \left(1+\frac{\alpha}{n}x\right)^{n} \geqslant 1+n\cdot\frac{\alpha}{n}x=1+\alpha x.$$

定理二到这里全部证完。

习 题

1. 设 $x\geqslant0$，试证：

$$1+x+x^2+x^3+\cdots+x^{2n}\geqslant(2n+1)x^n.$$

2. 证明：当 $n>1$ 时 $n!<\left(\frac{n+1}{2}\right)^n$，其中 $n!=n(n-1)\cdots2\cdot1$.

3. 设 a, b, c 都是正数，试证：

$$(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)\geqslant9abc.$$

4. 设 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 是任意 n 个正数，试证不等式

$$\frac{a_1}{a_2}+\frac{a_2}{a_3}+\cdots+\frac{a_{n-1}}{a_n}+\frac{a_n}{a_1}\geqslant n.$$

5. 试证不等式 $\qquad \dfrac{x^2+5}{\sqrt{x^2+4}}>2.$

6. 设 x, y, z 都是正数，试证不等式

$$x^4+y^4+z^4\geqslant x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2\geqslant xyz(x+y+z).$$

7. 设 a, b, c 都是正数，而且满足 $a+b+c=1$，试证：

$$\left(\frac{1}{a}-1\right)\left(\frac{1}{b}-1\right)\left(\frac{1}{c}-1\right)\geqslant8.$$

8. 设 $a_1, a_2, a_3; b_1, b_2, b_3$ 都是正数，试证：

$$\left(\frac{a_1}{b_1}+\frac{a_2}{b_2}+\frac{a_3}{b_3}\right)\left(\frac{b_1}{a_1}+\frac{b_2}{a_2}+\frac{b_3}{a_3}\right)\geqslant9.$$

9. 设 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 都是正数，命 $S=a_1+a_2+\cdots+a_n$，试证：

$$\frac{S}{S-a_1}+\frac{S}{S-a_2}+\cdots+\frac{S}{S-a_n}\geqslant\frac{n^2}{n-1}.$$

10. 設 a,b,c 是任意三个正数，試証

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\geqslant\frac{3}{2}.$$

11. 設 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 都是正数，命 $S=a_1+a_2+\cdots+a_n$，試証：

$$(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n)\leqslant 1+S+\frac{S^2}{2!}+\frac{S^3}{3!}+\cdots+\frac{S^n}{n!}.$$

五 冪平均

在引言中我們就提到，可以有各种各样的方式来定义一組数的平均值。前面我們給出了三种平均——算术平均、几何平均和調和平均，并研究了这三者之間的关系，得出了一个很重要的結果：

$$H\leqslant G\leqslant A.$$

在这一节，我們要进一步拓广平均的概念。

設 $$a_1,a_2,\cdots,a_n$$

是任意 n 个正数，我們称

$$M_\gamma(a_1,a_2,\cdots,a_n)=\left(\frac{a_1^\gamma+a_2^\gamma+\cdots+a_n^\gamma}{n}\right)^{\frac{1}{\gamma}}\quad(\gamma\neq 0)$$

为这一組数的 γ **次冪平均**。以后簡記为 $M_\gamma(a)$。

显然，$M_\gamma(a)$ 具有前面所提到的关于 H,G,A 所共有的两条基本性質，即：

(一) 若 $a_1=a_2=\cdots=a_n=C$，那么 $M_\gamma(a)=C$；

(二) 若 $m\leqslant a_i\leqslant M\ (i=1,2,\cdots,n)$，那么 $m\leqslant M_\gamma(a)\leqslant M$。

从 $M_\gamma(a)$ 的定义式子显然可以看出 $M_0(a)$ 是沒有意义的。但是我們可以研究当 $\gamma\to 0$ 时 $M_\gamma(a)$ 的极限。下面我們

将証明，$\lim_{\gamma\to 0} M_\gamma(a)$ 是存在的，而且恰好是这 n 个数的几何平均，即
$$\lim_{\gamma\to 0} M_\gamma(a)=\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}=G. \qquad (1)$$

为了証明这个結果，必須先計算几个在高等数学中极为重要的极限。

引理一 $$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e.$$

証 先証 $$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e.$$

命 $$[x]^{①}=n,$$

于是 $$n\leqslant x<n+1,$$

所以当 $x\to+\infty$ 时，n 也趋于 ∞，而且

$$1+\frac{1}{n+1}\leqslant 1+\frac{1}{x}\leqslant 1+\frac{1}{n}.$$

所以

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n\leqslant\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^x<\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\leqslant\left(1+\frac{1}{n}\right)^x$$
$$<\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}. \qquad (2)$$

由第四节例 5 知道

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\left(1+\frac{1}{n}\right)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)=e,$$

① $[x]$表示实数 x 的整数部分，即不超过 x 的最大整数．如 $[2.8]=2$，$[-1.3]=-2$。

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{1+\frac{1}{n+1}}$$

$$=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)}=e.$$

这就是說不等式(2)的两端，当 $x\to+\infty$ 即 $n\to+\infty$ 时，都以 e 为极限，所以夹在中間的$(1+\frac{1}{x})x$ 当 $x\to+\infty$ 时也以 e 为极限，即

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e.$$

当 $x\to-\infty$ 时，命 $x=-y$，那么 $y\to+\infty$，这时

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\left(1-\frac{1}{y}\right)^{-y}=\left(\frac{y-1}{y}\right)^{-y}=\left(\frac{y}{y-1}\right)^y$$

$$=\left(1+\frac{1}{y-1}\right)^y=\left(1+\frac{1}{y-1}\right)^{y-1}\left(1+\frac{1}{y-1}\right).$$

所以

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\lim_{y\to+\infty}\left(1+\frac{1}{y-1}\right)^{y-1}\left(1+\frac{1}{y-1}\right)$$

$$=\lim_{y\to+\infty}\left(1+\frac{1}{y-1}\right)^{y-1}\cdot\lim_{y\to+\infty}\left(1+\frac{1}{y-1}\right)=e.$$

綜合上面两个結果，即得：

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e.$$

如果命 $\alpha=\frac{1}{x}$，那么当 $x\to\infty$时，$\alpha\to0$. 于是上述极限又可写为

$$\lim_{\alpha\to0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}=e. \tag{3}$$

引理二 $$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1.$$

証 如果命 $$y=(1+x)^{\frac{1}{x}}, \tag{4}$$
那么由(3)可知,当$x\to 0$时,$y\to e$. 在(4)两端取以e为底的自然对数,得

$$\ln y=\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}=\frac{\ln(1+x)}{x}.$$

所以 $$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=\lim_{y\to e}\ln y=\ln e=1.$$

引理三 $$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a.$$

証 命$y=a^x-1$, 那么当$x\to 0$时, y也趋于0。这时$a^x=1+y$,两边取自然对数得:

$$x\ln a=\ln(1+y),$$

即 $$x=\frac{\ln(1+y)}{\ln a}.$$

于是 $$\frac{a^x-1}{x}=\frac{y}{\frac{\ln(1+y)}{\ln a}}=\frac{\ln a}{\frac{\ln(1+y)}{y}}.$$

由引理二即得

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\frac{\ln a}{\lim\limits_{y\to 0}\frac{\ln(1+y)}{y}}=\ln a.$$

有了这三条引理,关于幂平均极限的等式(1)就不难証明了。由于

$$\ln M_\gamma(a)=\frac{1}{\gamma}\ln\frac{a_1{}^\gamma+a_2{}^\gamma+\cdots+a_n{}^\gamma}{n},$$

如果命 $$x=\frac{a_1^{\gamma}+a_2^{\gamma}+\cdots+a_n^{\gamma}}{n}-1,$$

那么因为 $$\lim_{\gamma\to 0}a_i^{\gamma}=1\quad(i=1,2,\cdots,n),$$

所以 $$\lim_{\gamma\to 0}x=0,$$

于是 $$\ln M_{\gamma}(a)=\frac{1}{\gamma}\ln(1+x)=\frac{\ln(1+x)}{x}\cdot\frac{x}{\gamma},\tag{5}$$

由引理二知 $$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1,$$

且由引理三知

$$\begin{aligned}\lim_{\gamma\to 0}\frac{x}{\gamma}&=\lim_{\gamma\to 0}\frac{\frac{a_1^{\gamma}+a_2^{\gamma}+\cdots+a_n^{\gamma}}{n}-1}{\gamma}\\&=\frac{1}{n}\lim_{\gamma\to 0}\frac{a_1^{\gamma}+a_2^{\gamma}+\cdots+a_n^{\gamma}-n}{\gamma}\\&=\frac{1}{n}\lim_{\gamma\to 0}\left(\frac{a_1^{\gamma}-1}{\gamma}+\frac{a_2^{\gamma}-1}{\gamma}+\cdots+\frac{a_n^{\gamma}-1}{\gamma}\right)\\&=\frac{1}{n}\left(\lim_{\gamma\to 0}\frac{a_1^{\gamma}-1}{\gamma}+\cdots+\lim_{\gamma\to 0}\frac{a_n^{\gamma}-1}{\gamma}\right)\\&=\frac{1}{n}(\ln a_1+\ln a_2+\cdots+\ln a_n)\\&=\frac{1}{n}\ln(a_1a_2\cdots a_n)=\ln\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}\end{aligned}$$

在(5)两端取 $\gamma\to 0$ 的极限，即得

$$\begin{aligned}\lim_{\gamma\to 0}\ln M_{\gamma}(a)&=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}\cdot\lim_{\gamma\to 0}\frac{x}{\gamma}\\&=\ln\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n},\end{aligned}$$

所以 $$\lim_{\gamma\to 0}M_{\gamma}(a)=\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}=G.$$

根据这个結果，我們便可規定 $M_0(a)$ 的意义了．很自然，我們定义

$$M_0(a)=G.$$

这样一来，$M_\gamma(a)$ 便对任何实数 γ 都有意义了。

当 $\gamma=1$ 时，

$$M_1(a)=\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n},$$

就給出了算术平均；当 $\gamma=-1$ 时，

$$M_{-1}(a)=\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}},$$

就給出了調和平均。

由此可見，γ 次幂平均的概念把許多种不同的求平均的方法統一起来了。

科学家們是永远关心事物間的內在联系的．人們自然想知道，对任意两个实数 α、β，α 次幂平均 $M_\alpha(a)$ 和 β 次幂平均 $M_\beta(a)$ 間有些什么关系呢？我們希望从定理一得到些启发．从一般的幂平均的角度来看，我們的定理一不过是

$$M_{-1}(a)\leqslant M_0(a)\leqslant M_1(a),$$

它指出了当 $\gamma=-1$，0 和 1 时三者之間的关系．这里值得注意的是三个足标的順序和不等号的順序是一致的．聪明的讀者自然会想到，一般来說，如果 $\alpha<\beta$，是否有不等式

$$M_\alpha(a)\leqslant M_\beta(a)$$

呢？下面的定理回答了这个問題。

定理三 設 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 是任意 n 个正数，如果 $\alpha<\beta$，那么一定有 $M_\alpha(a)\leqslant M_\beta(a)$，等号只有当 n 个数全相等时才能

成立。

証明 把 $M_\alpha(a)$ 和 $M_\beta(a)$ 简記为 M_α 和 M_β，我們要証明 $M_\alpha \leqslant M_\beta$，即 $\frac{M_\beta}{M_\alpha} \geqslant 1$。按照幂平均的定义，我們可把 $\frac{M_\beta}{M_\alpha}$ 写为：

$$\frac{M_\beta}{M_\alpha}=\frac{1}{M_\alpha}\left(\frac{a_1^\beta+a_2^\beta+\cdots+a_n^\beta}{n}\right)^{\frac{1}{\beta}}$$

$$=\left[\frac{\left(\frac{a_1}{M_\alpha}\right)^\beta+\left(\frac{a_2}{M_\alpha}\right)^\beta+\cdots+\left(\frac{a_n}{M_\alpha}\right)^\beta}{n}\right]^{\frac{1}{\beta}}.$$

从 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 造一組新数：

$$a'_1=\frac{a_1}{M_\alpha}, a'_2=\frac{a_2}{M_\alpha}, \cdots, a'_n=\frac{a_n}{M_\alpha},$$

这一組新数的 α 次幂平均

$$M'_\alpha=\left(\frac{a'^\alpha_1+a'^\alpha_2+\cdots+a'^\alpha_n}{n}\right)^{\frac{1}{\alpha}}$$

$$=\left[\frac{\left(\frac{a_1}{M_\alpha}\right)^\alpha+\left(\frac{a_2}{M_\alpha}\right)^\alpha+\cdots+\left(\frac{a_n}{M_\alpha}\right)^\alpha}{n}\right]^{\frac{1}{\alpha}}$$

$$=\frac{1}{M_\alpha}\left(\frac{a_1^\alpha+a_2^\alpha+\cdots+a_n^\alpha}{n}\right)^{\frac{1}{\alpha}}=1,$$

它的 β 次幂平均

$$M'_\beta=\left(\frac{a'^\beta_1+a'^\beta_2+\cdots+a'^\beta_n}{n}\right)^{\frac{1}{\beta}}$$

$$=\left[\frac{\left(\frac{a_1}{M_\alpha}\right)^\beta+\left(\frac{a_2}{M_\alpha}\right)^\beta+\cdots+\left(\frac{a_n}{M_\alpha}\right)^\beta}{n}\right]^{\frac{1}{\beta}}=\frac{M_\beta}{M_\alpha}.$$

因此只須証明 $M'_\beta \geqslant 1$ 就行了。也就是說，只要对 α 次幂平均等于 1 的那組数来証明它的 β 次幂平均不小于 1 就可以

了。

因此，我們不妨一开始就假定 $M_\alpha=1$，不然的話通过上面的討論可把問題化到这种情形。

由 $M_\alpha=1$ 即 $\left(\frac{a_1^\alpha+a_2^\alpha+\cdots+a_n^\alpha}{n}\right)^{\frac{1}{\alpha}}=1$，得：

$$a_1^\alpha+a_2^\alpha+\cdots+a_n^\alpha=n. \tag{6}$$

我們的目的是要証明

$$a_1^\beta+a_2^\beta+\cdots+a_n^\beta\geqslant n,$$

即
$$(a_1^\alpha)^{\frac{\beta}{\alpha}}+(a_2^\alpha)^{\frac{\beta}{\alpha}}+\cdots+(a_n^\alpha)^{\frac{\beta}{\alpha}}\geqslant n.$$

命 $a_1^\alpha=1+b_1,\quad a_2^\alpha=1+b_2,\quad \cdots,\quad a_n^\alpha=1+b_n,$

于是 $a_1^\alpha+a_2^\alpha+\cdots+a_n^\alpha=n+b_1+b_2+\cdots+b_n,$

由(6)即得
$$b_1+b_2+\cdots+b_n=0. \tag{7}$$

現在分三种情况来討論：

(i)先假定 $\beta>\alpha>0$，这时 $\frac{\beta}{\alpha}>1$，所以由定理二的后半部得：

$$\left.\begin{aligned}(a_1^\alpha)^{\frac{\beta}{\alpha}}&=(1+b_1)^{\frac{\beta}{\alpha}}\geqslant 1+\frac{\beta}{\alpha}b_1,\\(a_2^\alpha)^{\frac{\beta}{\alpha}}&=(1+b_2)^{\frac{\beta}{\alpha}}\geqslant 1+\frac{\beta}{\alpha}b_2,\\&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\(a_n^\alpha)^{\frac{\beta}{\alpha}}&=(1+b_n)^{\frac{\beta}{\alpha}}\geqslant 1+\frac{\beta}{\alpha}b_n.\end{aligned}\right\} \tag{8}$$

把这些不等式加起来，再应用(7)即得：

$$(a_1^\alpha)^{\frac{\beta}{\alpha}}+(a_2^\alpha)^{\frac{\beta}{\alpha}}+\cdots+(a_n^\alpha)^{\frac{\beta}{\alpha}}\geqslant n. \tag{9}$$

即 $$a_1^\beta+a_2^\beta+\cdots+a_n^\beta\geqslant n,$$

或者 $$\frac{a_1^\beta+a_2^\beta+\cdots+a_n^\beta}{n}\geqslant 1.$$

两边乘$\frac{1}{\beta}$次方，即得：

$$M_\beta\geqslant 1=M_\alpha.$$

因此当 $\beta>\alpha>0$ 时定理成立.

(ii)若 $\alpha<\beta<0$, 那么 $0<\frac{\beta}{\alpha}<1$. 这时由定理二的前半部知不等式(8)的不等号全部要换方向，因此不等式(9)也要换方向，于是得：

$$a_1^\beta+a_2^\beta+\cdots+a_n^\beta\leqslant n,$$

即 $$\frac{a_1^\beta+a_2^\beta+\cdots+a_n^\beta}{n}\leqslant 1.$$

但因 $\beta<0$, 因此两边乘$\frac{1}{\beta}$次方后，不等式要换方向，即

$$\left(\frac{a_1^\beta+a_2^\beta+\cdots+a_n^\beta}{n}\right)^{\frac{1}{\beta}}\geqslant 1,$$

即 $$M_\beta\geqslant 1=M_\alpha.$$

(iii)最后討論 α,β 异号的情形，即 $\alpha<0<\beta$, 这时

$$\frac{\beta}{\alpha}<0.$$

所以由定理二的后半部知不等式(8)这时全部成立，因而(9)也成立。于是完全和(i)一样，証得

$$M_\beta\geqslant M_\alpha.$$

这样，我們就 $\alpha<\beta$ 的各种情况証得了不等式

$$M_\alpha\leqslant M_\beta.$$

最后，我們来討論等号成立的条件。要上式等号成立，必須

(8)中的等号全部成立，而由定理二知，这只有在

$$b_1 = b_2 = \cdots = b_n = 0$$

时才有可能，也就是說

$$a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 1,$$

这是因为我們一开始假定了 $M_\alpha = 1$ 的緣故。在一般的情况下，等号成立的条件是：

$$a_1 = a_2 = \cdots = a_n = M_\alpha.$$

定理三到这里全部証完。

特别，由于 $-1 < 0 < 1 < 2$，由定理三可得：

$$M_{-1} \leqslant M_0 \leqslant M_1 \leqslant M_2,$$

即調和平均不超过几何平均，几何平均不超过算术平均，而算术平均又不超过平方平均。

如果我們把 γ 次冪平均 $M_\gamma(a)$ 看作 γ 的函数，那么定理三告訴我們，$M_\gamma(a)$ 是 γ 的遞增函数，也就是說，随着 γ 的增大，$M_\gamma(a)$ 的值越来越大。那么当 $\gamma \to +\infty$ 时 $M_\gamma(a)$ 是否会趋于无穷大呢？很容易知道这是不可能的。因为若設 a_1, a_2 分别是 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 中最大的和最小的，这时

$$a_2 \leqslant a_i \leqslant a_1 \quad (i = 1, 2, \cdots, n),$$

由此可以推出

$$a_2 \leqslant M_\gamma(a) \leqslant a_1.$$

因此 $M_\gamma(a)$ 是有界的，它不能趋于 ∞。既然 $M_\gamma(a)$ 是 γ 的遞增有界函数，因此当 $\gamma \to +\infty$ 时它必有极限。那么它的极限究竟是什么呢？

由于

$$M_\gamma(a)=\left(\frac{a_1^\gamma+a_2^\gamma+\cdots+a_n^\gamma}{n}\right)^{\frac{1}{\gamma}}\geqslant\left(\frac{a_1^\gamma}{n}\right)^{\frac{1}{\gamma}}=a_1\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{\gamma}},$$

所以得

$$a_1\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{\gamma}}\leqslant M_\gamma(a)\leqslant a_1. \tag{10}$$

因为当 $\gamma\to+\infty$ 时，$\frac{1}{\gamma}\to 0$，所以有 $\lim\limits_{\gamma\to+\infty}\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{\gamma}}=1$，因此当 $\gamma\to+\infty$ 时，不等式(10)的左端以 a_1 为极限，右端当然也以 a_1 为极限。于是，夹在中間的 $M_\gamma(a)$ 当然也只能以 a_1 为极限了，即

$$\lim_{\gamma\to+\infty}M_\gamma(a)=a_1,$$

或者

$$\lim_{\gamma\to+\infty}M_\gamma(a)=\max(a_1,a_2,\cdots,a_n).$$

現在再研究 $\gamma\to-\infty$ 时 $M_\gamma(a)$ 的极限。因为

$$\begin{aligned}M_{-\gamma}(a)&=\left(\frac{a_1^{-\gamma}+a_2^{-\gamma}+\cdots+a_n^{-\gamma}}{n}\right)^{-\frac{1}{\gamma}}\\&=\left[\frac{\left(\frac{1}{a_1}\right)^\gamma+\left(\frac{1}{a_2}\right)^\gamma+\cdots+\left(\frac{1}{a_n}\right)^\gamma}{n}\right]^{-\frac{1}{\gamma}}\\&=\frac{1}{\left[\frac{\left(\frac{1}{a_1}\right)^\gamma+\left(\frac{1}{a_2}\right)^\gamma+\cdots+\left(\frac{1}{a_n}\right)^\gamma}{n}\right]^{\frac{1}{\gamma}}}\\&=\frac{1}{M_\gamma\left(\frac{1}{a_1},\frac{1}{a_2},\cdots,\frac{1}{a_n}\right)}=\frac{1}{M_\gamma\left(\frac{1}{a}\right)}.\end{aligned}$$

根据剛才証明的結果

$$\lim_{\gamma\to+\infty}M_\gamma\left(\frac{1}{a}\right)=\max\left(\frac{1}{a_1},\frac{1}{a_2},\cdots,\frac{1}{a_n}\right)=\frac{1}{\min(a_1,a_2,\cdots,a_n)},$$

于是得

$$\lim_{\gamma\to-\infty} M_\gamma(a) = \lim_{\gamma\to+\infty} M_{-\gamma}(a) = \frac{1}{\lim\limits_{\gamma\to+\infty} M_\gamma\left(\frac{1}{a}\right)}$$

$$= \min(a_1, a_2, \cdots, a_n).$$

这样，我們就弄清楚了当 $\gamma\to+\infty$ 和 $\gamma\to-\infty$ 时，$M_\gamma(a)$ 的变化情况，它們分别以

$$\max(a_1, a_2, \cdots, a_n) \text{ 和 } \min(a_1, a_2, \cdots, a_n)$$

为极限，即

$$\lim_{\gamma\to+\infty} M_\gamma(a) = \max(a_1, a_2, \cdots, a_n),$$

$$\lim_{\gamma\to-\infty} M_\gamma(a) = \min(a_1, a_2, \cdots, a_n).$$

习　题

1. 設 x, y, z 都是正数，且 $x^2+y^2+z^2=8$，試証

$$x^3+y^3+z^3 \geqslant 16\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

2. 設 x, y, z 都是正数，且 $x^4+y^4+z^4=1$，試証

$$x^2+y^2+z^2 \leqslant \sqrt{3}.$$

3. 設 x, y, z 都是正数，且 $x+y+z=3$，試証

$$x^3+y^3+z^3 \geqslant 3.$$

4. 設 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 是任意 n 个正数，試証：

当 $\alpha \geqslant 1$ 时，有

$$(a_1+a_2+\cdots+a_n)^\alpha \leqslant n^{\alpha-1}(a_1^\alpha+a_2^\alpha+\cdots+a_n^\alpha);$$

当 $0<\alpha\leqslant 1$ 时，有

$$(a_1+a_2+\cdots+a_n)^\alpha \geqslant n^{\alpha-1}(a_1^\alpha+a_2^\alpha+\cdots+a_n^\alpha).$$

5. 設 a, b, c, d 都是正数，試証：

$$(a^3+b^3+c^3+d^3)^2 \leqslant 4(a^6+b^6+c^6+d^6),$$

6. 設 $a_1,a_2,\cdots,a_n;\alpha,\beta$ 都是正数，且 $\gamma=\alpha+\beta$，試証：

$$\frac{a_1^\gamma+a_2^\gamma+\cdots+a_n^\gamma}{n}\geqslant\frac{a_1^\alpha+a_2^\alpha+\cdots+a_n^\alpha}{n}\cdot\frac{a_1^\beta+a_2^\beta+\cdots+a_n^\beta}{n}.$$

7. 設 a,b,c 都是正数，試証：

(i) $3(a^3+b^3+c^3)\geqslant(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)$；

(ii) $a^5+b^5+c^5\geqslant abc(a^2+b^2+c^2)$.

8. 設 x,y,z 都是正数，且 $xyz=1$，試証当 $n\geqslant3$ 时，有

$$x^n+y^n+z^n\geqslant x^{n-3}+y^{n-3}+z^{n-3}.$$

9. 設 a,b 都是正数，而且 $a+b=1$，試証：

$$\left(a+\frac{1}{a}\right)^2+\left(b+\frac{1}{b}\right)^2\geqslant\frac{25}{2}.$$

10. 設 a,b,c 都是正数，且 $a+b+c=1$，試証：

$$\left(a+\frac{1}{a}\right)^2+\left(b+\frac{1}{b}\right)^2+\left(c+\frac{1}{c}\right)^2\geqslant\frac{100}{3}.$$

11. 設 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 都是正数，且 $a_1+a_2+\cdots+a_n=1$，試証当 $m\geqslant1$ 时，有

$$\left(a_1+\frac{1}{a_1}\right)^m+\left(a_2+\frac{1}{a_2}\right)^m+\cdots+\left(a_n+\frac{1}{a_n}\right)^m\geqslant n\left(n+\frac{1}{n}\right)^m.$$

12. 設 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是一組正数，且滿足 $x_1+x_2+\cdots+x_n=c$，問 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 取什么値时，函数 $x_1^\alpha+x_2^\alpha+\cdots+x_n^\alpha$ 取最小値？这儿 α 是大于 1 的定数。

六　加权平均

以上所講到的几种求平均的方法，有一个共同的特点，就是在求平均的过程中，我們对待各个原始数据是一視同仁的：既不特別看重 a_1，也不貶低 a_2。这种求平均的方式有点硬性拉平的味道，在許多实际情况下是不合适的。

举个例子来説吧．如果某一家帽子工厂生产三种不同規格的帽子，它們的单价分别是 3 元，5 元，10元，如果我們簡单地認为这家工厂产品的平均价格是

$$M=\frac{3\text{元}+5\text{元}+10\text{元}}{3}=6\text{元},$$

那就不能反映实际情况．因为如果每种帽子的产量分别是：

3 元	5 元	10元
6000 頂，	3000 頂，	1000 頂，

那么廉价帽的比重相对地大，高价帽的比重相对地小，求平均时必須把这一情况反映出来．但按照以前那种方法是做不到这一点的．比較合理的做法应該是：

$$M=\frac{6000\times 3+3000\times 5+1000\times 10}{6000+3000+1000}$$
$$=\frac{6}{10}\times 3+\frac{3}{10}\times 5+\frac{1}{10}\times 10=4.3(\text{元}),$$

这才是这家工厂所生产的帽子的平均价格．这里三个系数

$$p_1=\frac{6}{10},\quad p_2=\frac{3}{10},\quad p_3=\frac{1}{10}$$

反映了各种产品在求平均过程中所起的作用．注意，这些系数还滿足关系：

$$p_1+p_2+p_3=1.$$

为了充分說明这种想法，讓我們再举一个例子．如果有 n 种不同的溶液，它們的比重和体积如下：

	第一种	第二种	……	第 n 种
体积	V_1	V_2	……	V_n
比重	a_1	a_2	……	a_n

现在把这 n 种溶液混在一起，求这混合溶液的比重。显然，由于不同体积的溶液在整个混合液内所起的作用不同，因此混合溶液的比重并不是原有溶液比重的簡单算术平均，而应該是：

$$a=\frac{V_1a_1+V_2a_2+\cdots+V_na_n}{V_1+V_2+\cdots+V_n},$$

这里分子表示整个混合溶液的重量，分母表示混合溶液的体积。

如果命 $p_i=\frac{V_i}{V_1+V_2+\cdots+V_n}\quad(i=1,2,\cdots,n)$，

那么有 $p_1+p_2+\cdots+p_n=1,\quad p_i>0\ (i=1,2,\cdots,n)$.

和上例一样，这儿的 p_i 反映了各种不同溶液在混合溶液内所起的作用。

从上面两个例子，使我們想到有必要引进另一种求平均值的方法。

如果有一組数 $p_i>0$，滿足条件

$$p_1+p_2+\cdots+p_n=1,$$

那么称数 $\overline{a}=p_1a_1+p_2a_2+\cdots+p_na_n$ (1)

为数組 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 的**加权平均**. p_i 称为**加权系数**.

加权平均也可定义为

$$\overline{a}=\frac{q_1a_1+q_2a_2+\cdots+q_na_n}{q_1+q_2+\cdots+q_n}, \quad (2)$$

其中 $q_i>0(i=1,2,\cdots,n)$. 若命

$$p_i=\frac{q_i}{q_1+q_2+\cdots+q_n}\quad(i=1,2,\cdots,n),$$

这就回到了原来的定义。

算术平均是加权平均的一个特例，相当于加权系数彼此相等，即

$$p_1=p_2=\cdots=p_n=\frac{1}{n}$$

的情形。显然加权平均也有算术平均所具有的两条基本性質。例如当 $a_1=a_2=\cdots=a_n=a$

时，加权平均

$$\overline{a}=p_1a_1+p_2a_2+\cdots+p_na_n=a(p_1+p_2+\cdots+p_n)=a,$$

当 $m\leqslant a_i\leqslant M\ (i=1,2,\cdots,n)$ 时，我們也有

$$m=m(p_1+p_2+\cdots+p_n)\leqslant p_1a_1+p_2a_2+\cdots+p_na_n$$
$$\leqslant M(p_1+p_2+\cdots+p_n)=M,$$

即 $$m\leqslant\overline{a}\leqslant M.$$

和以前一样，我們还可引入加权冪平均作为加权平均概念的拓广。

我們把

$$M_\gamma(a,p)=(p_1a_1^\gamma+p_2a_2^\gamma+\cdots+p_na_n^\gamma)^{\frac{1}{\gamma}},$$
$$p_1+p_2+\cdots+p_n=1,\quad p_i>0;$$

或者 $$M_\gamma(a,q)=\left(\frac{q_1a_1^\gamma+q_2a_2^\gamma+\cdots+q_na_n^\gamma}{q_1+q_2+\cdots+q_n}\right)^{\frac{1}{\gamma}},\quad q_i>0$$

叫做 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 的**加权冪平均**。当然它們也有算术平均所有的两条基本性質。

和以前一样，这儿 $M_0(a,q)$ 是沒有意义的，我們必須补充它的定义。为此我們研究当 $\gamma\to0$ 时 $M_\gamma(a,q)$ 的极限。注意

$$\ln M_\gamma(a,q)=\frac{1}{\gamma}\ln\frac{q_1a_1^\gamma+q_2a_2^\gamma+\cdots+q_na_n^\gamma}{q_1+q_2+\cdots+q_n},\qquad(3)$$

如果命 $$x=\frac{q_1a_1{}^{\gamma}+q_2a_2{}^{\gamma}+\cdots+q_na_n{}^{\gamma}}{q_1+q_2+\cdots q_n}-1,$$
那么当 $\gamma\to0$ 时，x 也趋于 0. 现在(3)可写为

$$\ln M_{\gamma}(a,q)=\frac{1}{\gamma}\ln(1+x)=\frac{\ln(1+x)}{x}\cdot\frac{x}{\gamma},$$

和以前一样，我們的主要工作是計算 $\lim\limits_{\gamma\to0}\frac{x}{\gamma}$. 因为

$$\frac{x}{\gamma}=\frac{q_1a_1{}^{\gamma}+q_2a_2{}^{\gamma}+\cdots+q_na_n{}^{\gamma}-(q_1+q_2+\cdots+q_n)}{\gamma(q_1+q_2+\cdots+q_n)}$$

$$=\frac{1}{q_1+q_2+\cdots+q_n}\left(q_1\frac{a_1{}^{\gamma}-1}{\gamma}+q_2\frac{a_2{}^{\gamma}-1}{\gamma}+\cdots+q_n\frac{a_n{}^{\gamma}-1}{\gamma}\right)$$

所以

$$\lim_{\gamma\to0}\frac{x}{\gamma}=\frac{1}{q_1+q_2+\cdots+q_n}\left(q_1\lim_{\gamma\to0}\frac{a_1{}^{\gamma}-1}{\gamma}\right.$$

$$\left.+q_2\lim_{\gamma\to0}\frac{a_2{}^{\gamma}-1}{\gamma}+\cdots+q_n\lim_{\gamma\to0}\frac{a_n{}^{\gamma}-1}{\gamma}\right)$$

$$=\frac{1}{q_1+q_2+\cdots+q_n}(q_1\ln a_1+q_2\ln a_2+\cdots+q_n\ln a_n)$$

$$=\ln(a_1^{q_1}a_2^{q_2}\cdots a_n^{q_n})^{\frac{1}{q_1+q_2+\cdots+q_n}}.$$

于是有

$$\lim_{\gamma\to0}\ln M_{\gamma}(a,q)=\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x)}{x}\cdot\lim_{\gamma\to0}\frac{x}{\gamma}$$

$$=\ln(a_1^{q_1}a_2^{q_2}\cdots a_n^{q_n})^{\frac{1}{q_1+q_2+\cdots+q_n}}$$

即 $$\lim_{\gamma\to0}M_{\gamma}(a,q)=(a_1^{q_1}a_2^{q_2}\cdots a_n^{q_n})^{\frac{1}{q_1+q_2+\cdots+q_n}} \tag{4}$$

如果取 $q_1=q_2=\cdots=q_n=1$，这就是我們以前证得的結果.

根据这个結果，我們很自然地規定

$$M_0(a, q)=(a_1^{q_1} a_2^{q_2}\cdots a_n^{q_n})^{\frac{1}{q_1+q_2+\cdots+q_n}}.$$

很自然会提出这样的問題：加权幂平均是否具有幂平均所有的性质？例如，如果 $\alpha<\beta$，是否一定有

$$M_\alpha(a, q)\leqslant M_\beta(a, q)?$$

在定理三的基础上来回答这个問題幷不困难.

定理四 如果 $\alpha<\beta$，那么必有 $M_\alpha(a, q)\leqslant M_\beta(a, q)$，其中等号只当 $a_1=a_2=\cdots=a_n$ 时才成立.

证明 如果 $q_1, q_2, \cdots, q_n$ 都是自然数，那么这个結論很容易从定理三推出. 因为这时

$$M_\alpha(a, q)=\left(\frac{q_1a_1^\alpha+q_2a_2^\alpha+\cdots+q_na_n^\alpha}{q_1+q_2+\cdots+q_n}\right)^{\frac{1}{\alpha}}$$

$$=\left(\frac{\overbrace{a_1^\alpha+\cdots+a_1^\alpha}^{q_1\text{个}}+\overbrace{a_2^\alpha+\cdots+a_2^\alpha}^{q_2\text{个}}+\cdots+\overbrace{a_n^\alpha+\cdots+a_n^\alpha}^{q_n\text{个}}}{q_1+q_2+\cdots+q_n}\right)^{\frac{1}{\alpha}},$$

对 $\underbrace{a_1^\alpha, \cdots, a_1^\alpha}_{q_1\text{个}}, \underbrace{a_2^\alpha, \cdots, a_2^\alpha}_{q_2\text{个}}, \cdots, \underbrace{a_n^\alpha, \cdots, a_n^\alpha}_{q_n\text{个}}$ 这 $q_1+q_2+\cdots+q_n$ 个数应用定理三，即得

$$M_\alpha(a, q)=\left(\frac{\overbrace{a_1^\alpha+\cdots+a_1^\alpha}^{q_1\text{个}}+\overbrace{a_2^\alpha+\cdots+a_2^\alpha}^{q_2\text{个}}+\cdots+\overbrace{a_n^\alpha+\cdots+a_n^\alpha}^{q_n\text{个}}}{q_1+q_2+\cdots+q_n}\right)^{\frac{1}{\alpha}}$$

$$\leqslant\left(\frac{\overbrace{a_1^\beta+\cdots+a_1^\beta}^{q_1\text{个}}+\overbrace{a_2^\beta+\cdots+a_2^\beta}^{q^2\text{个}}+\cdots+\overbrace{a_n^\beta+\cdots+a_n^\beta}^{q_n\text{个}}}{q_1+q_2+\cdots+q_n}\right)^{\frac{1}{\beta}}$$

$$=\left(\frac{q_1a_1^\beta+q_2a_2^\beta+\cdots+q_na_n^\beta}{q_1+q_2+\cdots+q_n}\right)^{\frac{1}{\beta}}=M_\beta(a, q),$$

因此，当 $q_1, q_2, \cdots, q_n$ 都是自然数时，定理成立。

今設 $q_1, q_2, \cdots, q_n$ 都是有理数，不妨設

$$q_i = \frac{s_i}{t_i} \quad (i = 1, 2, \cdots, n),$$

其中 s_i, t_i 都是自然数。这时

$$M_\alpha(a,q) = \left(\frac{q_1 a_1^\alpha + \cdots + q_n a_n^\alpha}{q_1 + q_2 + \cdots + q_n}\right)^{\frac{1}{\alpha}}$$

$$= \left(\frac{\frac{s_1}{t_1} a_1^\alpha + \frac{s_2}{t_2} a_2^\alpha + \cdots + \frac{s_n}{t_n} a_n^\alpha}{\frac{s_1}{t_1} + \frac{s_2}{t_2} + \cdots + \frac{s_n}{t_n}}\right)^{\frac{1}{\alpha}}$$

$$= \left[\frac{(s_1 t_2 \cdots t_n) a_1^\alpha + (t_1 s_2 t_3 \cdots t_n) a_2^\alpha + \cdots + (t_1 \cdots t_{n-1} s_n) a_n^\alpha}{(s_1 t_2 \cdots t_n) + (t_1 s_2 t_3 \cdots t_n) + \cdots + (t_1 \cdots t_{n-1} s_n)}\right]^{\frac{1}{\alpha}},$$

由于 $\qquad s_1 t_2 \cdots t_n, t_1 s_2 t_3 \cdots t_n, \cdots, t_1 \cdots t_{n-1} s_n$

都是自然数，应用刚才証得的結果，即得：

$$M_\alpha(a,q) \leqslant \left[\frac{(s_1 t_2 \cdots t_n) a_1^\beta + (t_1 s_2 t_3 \cdots t_n) a_2^\beta + \cdots + (t_1 \cdots t_{n-1} s_n) a_n^\beta}{(s_1 t_2 \cdots t_n) + (t_1 s_2 t_3 \cdots t_n) + \cdots + (t_1 \cdots t_{n-1} s_n)}\right]^{\frac{1}{\beta}}$$

$$= \left(\frac{\frac{s_1}{t_1} a_1^\beta + \frac{s_2}{t_2} a_2^\beta + \cdots + \frac{s_n}{t_n} a_n^\beta}{\frac{s_1}{t_1} + \frac{s_2}{t_2} + \cdots + \frac{s_n}{t_n}}\right)^{\frac{1}{\beta}}$$

$$= \left(\frac{q_1 a_1^\beta + q_2 a_2^\beta + \cdots + q_n a_n^\beta}{q_1 + q_2 + \cdots + q_n}\right)^{\frac{1}{\beta}} = M_\beta(a,q),$$

因此当 $q_1, q_2, \cdots, q_n$ 是有理数时定理依然正确。

最后設 $q_1, q_2, \cdots, q_n$ 是任意实数，这时我們一定可选取 n 个有理数列：

$$\{r_\nu^{(m)}\}\quad (m=1,2,\cdots,n),$$

使它們分別以 $q_1,q_2,\cdots,q_n$ 为极限，即

$$\lim_{\nu\to\infty} r_\nu^{(m)}=q_m \quad (m=1,2,\cdots,n).$$

对这些有理数来說，我們已經証得了：

$$M_\alpha(a,r_\nu)\leqslant M_\beta(a,r_\nu),$$

即

$$\left(\frac{r_\nu^{(1)}a_1^\alpha+r_\nu^{(2)}a_2^\alpha+\cdots+r_\nu^{(n)}a_n^\alpha}{r_\nu^{(1)}+r_\nu^{(2)}+\cdots+r_\nu^{(n)}}\right)^{\frac{1}{\alpha}}$$

$$\leqslant\left(\frac{r_\nu^{(1)}a_1^\beta+r_\nu^{(2)}a_2^\beta+\cdots+r_\nu^{(n)}a_n^\beta}{r_\nu^{(1)}+r_\nu^{(2)}+\cdots+r_\nu^{(n)}}\right)^{\frac{1}{\beta}}(\nu=1,2,\cdots).$$

由于上述不等式对任何自然数 ν 都是正确的，所以，命 $\nu\to\infty$，上述不等式依然正确，这时我們有

$$\left(\frac{q_1a_1^\alpha+q_2a_2^\alpha+\cdots+q_na_n^\alpha}{q_1+q_2+\cdots+q_n}\right)^{\frac{1}{\alpha}}$$

$$\leqslant\left(\frac{q_1a_1^\beta+q_2a_2^\beta+\cdots+q_na_n^\beta}{q_1+q_2+\cdots+q_n}\right)^{\frac{1}{\beta}},$$

即

$$M_\alpha(a,q)\leqslant M_\beta(a,q).$$

这样我們就对任何正实数 $q_1,q_2,\cdots,q_n$ 証得了定理四．从証明的过程显然可知，等号只有当 $a_1=a_2=\cdots=a_n$ 时才能成立．

上述証明体現了一个重要的方法．有些定理对一般的实数証明起来比較困难，而对有理数証明起来却比較容易． 在这种情况下，我們往往用有理数来逼近实数，然后通过极限手續来获得所要証的結果． 事实上，这种方法在証明定理二时我們已經用过了．

如果取 $\alpha=0,\beta=1$，我們有

$$M_0(a,q)\leqslant M_1(a,q),$$

卽

$$(a_1^{q_1}a_2^{q_2}\cdots a_n^{q_n})^{\frac{1}{q_1+q_2+\cdots+q_n}}\leqslant\frac{q_1a_1+q_2a_2+\cdots+q_na_n}{q_1+q_2+\cdots+q_n},\quad(5)$$

或者

$$a_1^{q_1}a_2^{q_2}\cdots a_n^{q_n}\leqslant\left(\frac{q_1a_1+q_2a_2+\cdots+q_na_n}{q_1+q_2+\cdots+q_n}\right)^{q_1+q_2+\cdots+q_n}.$$

这个不等式用处很大，它是定理一的直接推广（如取 $q_1=q_2=\cdots=q_n=1$ 就得到定理一了）。

最后我們来解释一下加权平均概念在力学上的意义。

如果在直綫上坐标分别是 x_1 和 x_2 的两点 A 和 B 处各放有一个質点，它們的質量分别是 m_1 和 m_2。我們要計算由这两个質点所构成的質点系的重心 G 的坐标 x_G。

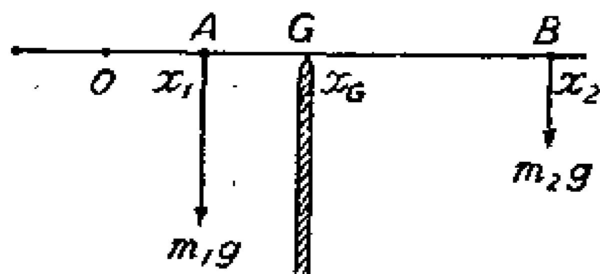


图 7.

显然，重心 G 一定在 A,B 的联綫上。我們把联綫 AB 想象成一条几乎沒有重量的硬金属絲。这时如果用鉛笔尖在 G 点处把它頂住的話，那么質点 m_1 和 m_2 在重力作用下应該象一架天平秤一样保持平衡。因此有

$$\overline{AG}\,m_1g=\overline{GB}\,m_2g.$$

但 $\quad\overline{AG}=x_G-x_1,\quad\overline{GB}=x_2-x_G,$

代入上式卽得 $\quad m_1(x_G-x_1)=m_2(x_2-x_G),$

解之卽得

$$x_G=\frac{m_1x_1+m_2x_2}{m_1+m_2}=p_1x_1+p_2x_2.$$

也就是說，重心坐标是这两个質点坐标的加权平均，而加权系数是

$$p_1=\frac{m_1}{m_1+m_2},\quad p_2=\frac{m_2}{m_1+m_2}.$$

上面我們算出了由两个質点所构成的質点系的重心坐标。現在我們問，对于一般由任意 n 个質点所构成的質点系的重心坐标是否也有类似的公式？换句話說，在直綫上任意給出 n 个質点 $A_1, A_2, \cdots, A_n$，它們的坐标和質量分别是：



图 8.

$$x_1, x_2, \cdots, x_n;\quad m_1, m_2, \cdots, m_n,$$

那么由这 n 个質点所构成的質点系的重心坐标 x_G 是否可写成

$$x_G=\frac{m_1x_1+m_2x_2+\cdots+m_nx_n}{m_1+m_2+\cdots+m_n} \tag{6}$$

下面我們用数学归納法来証明这个公式的正确性。

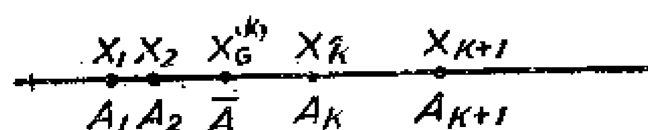


图 9.

当只有两个質点，也即 $n=2$ 时这个公式是成立的。今設 $n=k$ 时上式成立，要推出 $n=k+1$ 时上式也真。

設 $\overline{A}$ 是由 $A_1, A_2, \cdots, A_k$ 所构成的質点系的重心，用 $x_G^{(k)}$ 記它的坐标，那么由归納法假定知：

$$x_G^{(k)}=\frac{m_1x_1+m_2x_2+\cdots+m_kx_k}{m_1+m_2+\cdots+m_k},$$

現在我們可以用坐标为 $x_G^{(k)}$、質量是 $m_1+m_2+\cdots+m_k$ 的質点 $\overline{A}$ 来代替全部 k 个質点 $A_1,A_2,\cdots,A_k$，而求整个 $k+1$ 个質点$A_1,A_2,\cdots,A_k,A_{k+1}$的重心坐标就归結为計算質点 $\overline{A}$ 和 A_{k+1} 的重心坐标，所以有

$$x_G^{(k+1)}=\frac{(m_1+m_2+\cdots+m_k)x_G^{(k)}+m_{k+1}x_{k+1}}{(m_1+m_2+\cdots+m_k)+m_{k+1}}$$

$$=\frac{m_1x_1+m_2x_2+\cdots+m_kx_k+m_{k+1}x_{k+1}}{m_1+m_2+\cdots+m_k+m_{k+1}},$$

因此 $n=k+1$ 时公式(6)也成立。这就証明了对任意 n 个質点公式(6)都是正确的．也就是說由任意 n 个質点所构成的質点系的重心坐标是这 n 个質点的坐标的加权平均，而加权系数是

$$p_1=\frac{m_1}{m_1+m_2+\cdots+m_n},\quad p_2=\frac{m_2}{m_1+m_2+\cdots+m_n},$$

$$\cdots,p_n=\frac{m_n}{m_1+m_2+\cdots+m_n}.$$

公式(6)可以帮我們推出某些求和公式。

在数軸上取坐标分别是

$1,2,3,\cdots,n$

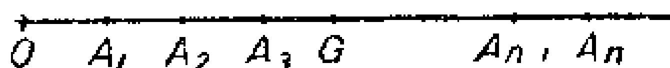


图 10.

的 n 个点 $A_1,A_2,\cdots,A_n$，并在这些点上分别放置質量C_n^1, C_n^2, $\cdots$,C_n^n, 在坐标原点 O 放置質量 C_n^0，这里的C_n^k $(k=0,1,2,\cdots,n)$ 表組合数。这样我們就得到由 $n+1$ 个質点构成的質点系。大家知道組合数滿足关系

$$C_n^k = C_n^{n-k} \qquad (k=0,1,2,\cdots,n),$$

因此 O 点的質量 C_n^0 和 A_n 点的質量 C_n^n 是相同的，A_1 点的質量 C_n^1 和 A_{n-1} 点的質量 C_n^{n-1} 是相同的，依此类推。不难知道，整个質点系的質量分布对于綫段 OA_n 的中点是对称的，因此，这質点系的重心就是綫段 OA_n 的中点。由于 $\overline{OA_n}=n$，所以重心坐标是 $\frac{n}{2}$。另一方面，根据公式(6)知道，这个質点系的重心坐标也可写为

$$\frac{0\cdot C_n^0+1\cdot C_n^1+2\cdot C_n^2+\cdots+nC_n^n}{C_n^0+C_n^1+C_n^2+\cdots C_n^n}.$$

联合这两結果，即得

$$\frac{0\cdot C_n^0+1\cdot C_n^1+2\cdot C_n^2+\cdots+nC_n^n}{C_n^0+C_n^1+C_n^2+\cdots+C_n^n}=\frac{n}{2}.$$

由二項式定理容易知道

$$C_n^0+C_n^1+C_n^2+\cdots+C_n^n=2^n,$$

把这結果代入上式，便可得出下面的求和公式：

$$1\cdot C_n^1+2\cdot C_n^2+\cdots+nC_n^n=n\cdot 2^{n-1}.$$

根据同样的道理，并利用公式

$$\sin k\frac{\pi}{n}=\sin(n-k)\frac{\pi}{n} \qquad (k=0,1,2,\cdots,n),$$

$$\sin\frac{\pi}{n}+\sin\frac{2\pi}{n}+\cdots+\sin\frac{(n-1)\pi}{n}=\cot\frac{\pi}{2n},$$

不难証明

$$1\cdot\sin\frac{\pi}{n}+2\cdot\sin\frac{2\pi}{n}+\cdots+(n-1)\sin\frac{(n-1)\pi}{n}+n\sin\frac{n\pi}{n}$$
$$=\frac{n}{2}\cot\frac{\pi}{2n}.$$

习　題

1. 設 x, y, z 都是正数，且 $x+2y+3z=12$，試証：

$$x^2+2y^2+3z^2 \geqslant 24.$$

2. 設 x, y, z 都是正数，試証：

$$\left(\frac{x+y+z}{3}\right)^{x+y+z} \leqslant x^x y^y z^z \leqslant \left(\frac{x^2+y^2+z^2}{x+y+z}\right)^{x+y+z}.$$

3. 試証对于任何正数 a_1, a_2, a_3, a_4，恒有不等式

$$a_1 a_2^2 a_3^3 a_4^4 \leqslant \left(\frac{a_1+2a_2+3a_3+4a_4}{10}\right)^{10}.$$

4. 試証不等式：

$$1\cdot 2^2\cdot 3^3\cdot 4^4\cdots n^n \leqslant \left(\frac{2n+1}{3}\right)^{\frac{n(n+1)}{2}}.$$

5. 試証不等式：

$$\sqrt{2}\cdot\sqrt[4]{4}\cdot\sqrt[8]{8}\cdots\sqrt[2^n]{2^n} < n+1.$$

6. 設 x, y, z 都是正数，且 $x+y+z=2$，試証：

$$x^x y^y z^z \geqslant \frac{4}{9}.$$

7. 設 p, q, r, x 都是正数，試証：

$$px^{q-r}+qx^{r-p}+rx^{p-q} \geqslant p+q+r.$$

8. 設 $a_1, a_2, \cdots, a_n; q_1, q_2, \cdots, q_n; \alpha, \beta$ 都是正数，且 $\gamma=\alpha+\beta$，試証：

$$\frac{q_1a_1^{\gamma}+q_2a_2^{\gamma}+\cdots+q_na_n^{\gamma}}{q_1+q_2+\cdots+q_n}$$

$$\geqslant \frac{q_1a_1^{\alpha}+q_2a_2^{\alpha}+\cdots+q_na_n^{\alpha}}{q_1+q_2+\cdots+q_n}\cdot\frac{q_1a_1^{\beta}+q_2a_2^{\beta}+\cdots+q_na_n^{\beta}}{q_1+q_2+\cdots+q_n}.$$

9. 設 $x, y, z; p, q, r$ 都是正数，且 $p+q+r=1$，試証：当 $n \geqslant 1$ 时有：

$$px^n+qy^n+rz^n \geqslant x^p y^q z^r (px^{n-1}+qy^{n-1}+rz^{n-1}).$$

10. 設 $x_i>0, \alpha_i>0 (i=1,2,\cdots,n)$，且 $x_1+x_2+\cdots+x_n=c$，試証函数

$$x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\cdots x_n^{\alpha_n}$$

当
$$\frac{x_1}{\alpha_1}=\frac{x_2}{\alpha_2}=\cdots=\frac{x_n}{\alpha_n}=\frac{c}{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n}$$

时取最大值。

11. 設 $a_i>0, x_i>0, \alpha_i>0, \beta_i>0 (i=1,2,\cdots,n)$，且

$$a_1x_1^{\beta_1}+a_2x_2^{\beta_2}+\cdots+a_nx_n^{\beta_n}=c,$$

試証函数
$$x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\cdots x_n^{\alpha_n}$$

当
$$\frac{\beta_1a_1x_1^{\beta_1}}{\alpha_1}=\frac{\beta_2a_2x_2^{\beta_2}}{\alpha_2}=\cdots=\frac{\beta_na_nx_n^{\beta_n}}{\alpha_n}$$

时取最大值。

12. 設 $x_i>0 (i=1,2\cdots,n)$，且 $x_1+x_2+\cdots+x_n=1$，試証函数

$$x_1^{x_1}x_2^{x_2}\cdots x_n^{x_n}$$

当
$$x_1=x_2=\cdots=x_n=\frac{1}{n}$$

时取最小值 $\frac{1}{n}$。

附录　习题解答或提示

第 三 节

1．利用定理一的不等式，使式中等号成立即得。

2．把它弯成边长为$\frac{l}{4}$的正方形。

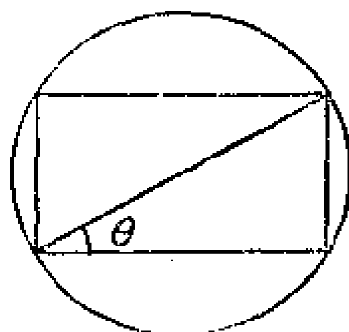


图 11．

3．設圓半徑是 R，那么圓內接矩形的面积可写为

$$S=(2R\cos\theta)(2R\sin\theta)$$
$$=2R^2\sin2\theta,$$

所以当$\theta=\frac{\pi}{4}$时，即这个矩形是正方形时，S 有最大值。

也可利用定理一找出使

$$S^2=16R^4\sin^2\theta\cos^2\theta$$

取最大值的 θ。

4．把 16 分成四个相等数之和，即 $16=4+4+4+4$，它們的乘积有最大值。

5．圓柱形的底半徑 $R=1$ 米，高 $H=1.5$ 米。

6．$\theta=\operatorname{arctg}\sqrt{2}$．

7．至少需要 40 米长。

8．設圓錐的高是 h，底半徑是 r，容积 $V_0=\frac{1}{3}\pi r^2h$，側面积 $S=\pi r\sqrt{r^2+h^2}$。根据定理一，

$$S^2=\pi^2r^2(r^2+h^2)=\pi^2r^4+\frac{1}{2}\pi^2r^2h^2+\frac{1}{2}\pi^2r^2h^2$$

$$\geqslant 3\sqrt[3]{(\pi^2r^4)\left(\frac{1}{2}\pi^2r^2h^2\right)\left(\frac{1}{2}\pi^2r^2h^2\right)}$$

$$=3\sqrt[3]{\frac{1}{4}\pi^6r^8h^4}=3\sqrt[3]{\frac{81}{4}\pi^2V_0^4}=\text{常数}.$$

当 $\pi^2r^4=\frac{1}{2}\pi^2r^2h^2=\frac{1}{2}\pi^2r^2h^2$ 时，S^2 有最小值。解上面这个等式得 $h=r\sqrt{2}$。

第四节

1. 用定理一以及恒等式 $1+2+3+\cdots+2n=n(2n+1)$。

2. 用定理一即得。

3. 利用 $a+b+c\geqslant 3\sqrt[3]{abc}$， $a^2+b^2+c^2\geqslant 3\sqrt[3]{(abc)^2}$。

4. 利用推論一。

5. 把 $\frac{x^2+5}{\sqrt{x^2+4}}$ 写成 $\sqrt{x^2+4}+\frac{1}{\sqrt{x^2+4}}$，然后应用推論一。

6. 利用不等式

$$x^4+y^4\geqslant 2x^2y^2,\quad y^4+z^4\geqslant 2y^2z^2,\quad z^4+x^4\geqslant 2z^2x^2$$

即可証得左半的不等式。右半不等式可仿同法証得。

7. 題中的不等式等价于

$$(b+c)(c+a)(a+b)\geqslant 8abc.$$

8. 利用推論二。

9. 仿照第四节的例 3 来做。

10. 这是上題 $n=3$ 的特殊情况。根据第 9 題，我們有

$$\frac{a+b+c}{b+c}+\frac{a+b+c}{c+a}+\frac{a+b+c}{a+b}\geqslant\frac{9}{2},$$

即
$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}+3\geqslant\frac{9}{2},$$

移项，即得所要証明的不等式。

11. 利用定理一得

$$(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n)\leqslant\left(\frac{n+a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\right)^n=\left(1+\frac{S}{n}\right)^n.$$

利用牛頓二項式定理把 $\left(1+\frac{S}{n}\right)^n$ 展开，即可得所要証明的不等式。

第五节

1. 由于 $M_3(x,y,z)\geqslant M_2(x,y,z)$，所以有

$$\left(\frac{x^3+y^3+z^3}{3}\right)^{\frac{1}{3}}\geqslant\left(\frac{x^2+y^2+z^2}{3}\right)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{\frac{8}{3}},$$

即

$$x^3+y^3+z^3\geqslant 16\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

2. 用不等式 $M_2(x,y,z)\leqslant M_4(x,y,z)$。

3. 用不等式 $M_3(x,y,z)\geqslant M_1(x,y,z)$。

4. 当 $\alpha\geqslant 1$ 时，由 $M_\alpha(a)\geqslant M_1(a)$，得

$$\left(\frac{a_1^\alpha+a_2^\alpha+\cdots+a_n^\alpha}{n}\right)^{\frac{1}{\alpha}}\geqslant\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n},$$

或者

$$\left(\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\right)^\alpha\leqslant\frac{a_1^\alpha+a_2^\alpha+\cdots+a_n^\alpha}{n},$$

不等式两端同乘以 n^α，即得所要証的不等式。同样道理，可以証明 $0<\alpha\leqslant 1$ 时的情况。

特别，如果取 $n=2$，便得：

$$(a_1+a_2)^\alpha\leqslant 2^{\alpha-1}(a_1^\alpha+a_2^\alpha),\quad \alpha\geqslant 1;$$

$$(a_1+a_2)^\alpha\geqslant 2^{\alpha-1}(a_1^\alpha+a_2^\alpha),\quad 0<\alpha\leqslant 1.$$

5. 用不等式 $M_3(a,b,c,d)\leqslant M_6(a,b,c,d)$。

6. 利用定理三証明

$$M_\gamma^{\ \gamma}(a)\geqslant M_\alpha^{\ \alpha}(a)M_\beta^{\ \beta}(a).$$

7. 利用第6題的不等式即得。

8. 利用第 6 题的不等式和 $\frac{x^3+y^3+z^3}{3}\geqslant xyz$.

9. 因为 $M_2(a+\frac{1}{a},b+\frac{1}{b})\geqslant M_1(a+\frac{1}{a},b+\frac{1}{b})$,

即 $$\left(\frac{\left(a+\frac{1}{a}\right)^2+\left(b+\frac{1}{b}\right)^2}{2}\right)^{\frac{1}{2}}\geqslant\frac{\left(a+\frac{1}{a}\right)+\left(b+\frac{1}{b}\right)}{2}=\frac{1+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}{2}.$$

又因 $$(a+b)\ (\frac{1}{a}+\frac{1}{b})\geqslant 4,$$

所以 $$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\geqslant 4,$$

把这結果代入上面的不等式，得：

$$\left(\frac{\left(a+\frac{1}{a}\right)^2+\left(b+\frac{1}{b}\right)^2}{2}\right)^{\frac{1}{2}}\geqslant\frac{5}{2}.$$

不等式两端平方再同乘以 2，即得所要証明的不等式.

10. 用不等式

$$M_2\left(a+\frac{1}{a},b+\frac{1}{b},c+\frac{1}{c}\right)\geqslant M_1\left(a+\frac{1}{a},b+\frac{1}{b},c+\frac{1}{c}\right)$$

和推論二.

11. 这是第 9 題結果的推广，証法和上題一样. 利用

$$M_m\left(a_1+\frac{1}{a_1},a_2+\frac{1}{a_2},\cdots,a_n+\frac{1}{a_n}\right)$$
$$\geqslant M_1\left(a_1+\frac{1}{a_1},a_2+\frac{1}{a_2},\cdots,a_n+\frac{1}{a_n}\right)$$

和推論二即得.

12. 当 $\alpha>1$ 时，$M_\alpha(x)\geqslant M_1(x)$，即

$$\left(\frac{x_1{}^\alpha+x_2{}^\alpha+\cdots+x_n{}^\alpha}{n}\right)^{\frac{1}{\alpha}}\geqslant\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}=\frac{c}{n}.$$

即 $$x_1^\alpha+x_2^\alpha+\cdots+x_n^\alpha\geqslant n\left(\frac{c}{n}\right)^\alpha.$$

上述等号当 $x_1=x_2=\cdots=x_n=\frac{c}{n}$ 时成立。所以当 $x_1=x_2=\cdots=x_n=\frac{c}{n}$ 时 $x_1^\alpha+x_2^\alpha+\cdots+x_n^\alpha$ 取最小值 $n\left(\frac{c}{n}\right)^\alpha$。

第六节

1. 在不等式

$$\left(\frac{q_1a_1^2+q_2a_2^2+q_3a_3^2}{q_1+q_2+q_3}\right)^{\frac{1}{2}}\geqslant\frac{q_1a_1+q_2a_2+q_3a_3}{q_1+q_2+q_3}$$

中取 $q_1=1$，$q_2=2$，$q_3=3$；$a_1=x$，$a_2=y$，$a_3=z$ 即得。

2. 在不等式 $M_0(a,q)\leqslant M_1(a,q)$ 中取 $n=3$ 即得：

$$\left(a_1^{q_1}a_2^{q_2}a_3^{q_3}\right)^{\frac{1}{q_1+q_2+q_3}}\leqslant\frac{q_1a_1+q_2a_2+q_3a_3}{q_1+q_2+q_3},$$

或者 $$a_1^{q_1}a_2^{q_2}a_3^{q_3}\leqslant\left(\frac{q_1a_1+q_2a_2+q_3a_3}{q_1+q_2+q_3}\right)^{q_1+q_2+q_3}.$$

在上面这个不等式中取

$$a_1=q_1=x,\quad a_2=q_2=y,\quad a_3=q_3=z,$$

得 $$x^xy^yz^z\leqslant\left(\frac{x^2+y^2+z^2}{x+y+z}\right)^{x+y+z},$$

这就是所要証明的不等式的右半。如果在上面这同一个不等式中取

$$q_1=x,\ a_1=\frac{1}{x};\ q_2=y,\ a_2=\frac{1}{y};\ q_3=z,\ a_3=\frac{1}{z},$$

那么 $$\frac{1}{x^xy^yz^z}\leqslant\left(\frac{3}{x+y+z}\right)^{x+y+z}.$$

不等式两端取倒数，即得：

$$x^xy^yz^z\geqslant\left(\frac{x+y+z}{3}\right)^{x+y+z}.$$

3. 应用推广的定理一，即不等式 $M_0(a,q)\leqslant M_1(a,q)$。

4. 应用推广的定理一，即不等式 $M_0(a,q)\leqslant M_1(a,q)$。

5. 把不等式的左端写成

$$1^{\alpha}2^{\frac{1}{2}}(2^2)^{\frac{1}{2^2}}\cdots(2^n)^{\frac{1}{2^n}},$$

这儿 α 可以是任何正数。由推广的定理一得：

$$1^{\alpha}2^{\frac{1}{2}}(2^2)^{\frac{1}{2^2}}\cdots(2^n)^{\frac{1}{2^n}}$$

$$\leqslant\left(\frac{\alpha+\frac{1}{2}\cdot 2+\frac{1}{2^2}\cdot 2^2+\cdots+\frac{1}{2^n}\cdot 2^n}{\alpha+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^n}}\right)^{\alpha+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^n}}$$

$$=\left(\frac{\alpha+n}{\alpha+1-\frac{1}{2^n}}\right)^{\alpha+1-\frac{1}{2^n}}.$$

在上面这个不等式中令 $\alpha=\frac{1}{2^n}$ 即得

$$2^{\frac{1}{2}}(2^2)^{\frac{1}{2^2}}\cdots(2^n)^{\frac{1}{2^n}}\leqslant n+\frac{1}{2^n}<n+1.$$

这就是所要証明的不等式。

6. 利用第 2 题的結果。

7. 在不等式

$$a_1^{q_1}a_2^{q_2}a_3^{q_3}\leqslant\left(\frac{q_1a_1+q_2a_2+q_3a_3}{q_1+q_2+q_3}\right)^{q_1+q_2+q_3}$$

中取 $q_1=p$，$q_2=q$，$q_3=r$；$a_1=x^{q-r}$，$a_2=x^{r-p}$，$a_3=x^{p-q}$ 即得。

8. 利用定理四証明

$$M_{\gamma}^{\gamma}(a,q)\geqslant M_{\alpha}^{\alpha}(a,q)\,M_{\beta}^{\beta}(a,q).$$

9. 利用上題的結果以及推广的定理一。

10. 应用推广的定理一有：

$$\left(\frac{x_1}{\alpha_1}\right)^{\alpha_1}\left(\frac{x_2}{\alpha_2}\right)^{\alpha_2}\cdots\left(\frac{x_n}{\alpha_n}\right)^{\alpha_n}$$

$$\leqslant\left(\frac{\alpha_1\frac{x_1}{\alpha_1}+\alpha_2\frac{x_2}{\alpha_2}+\cdots+\alpha_n\frac{x_n}{\alpha_n}}{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n}\right)^{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n}$$

$$=\left(\frac{c}{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n}\right)^{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n}$$

即

$$x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\cdots x_n^{\alpha_n}\leqslant\alpha_1^{\alpha_1}\alpha_2^{\alpha_2}\cdots\alpha_n^{\alpha_n}\left(\frac{c}{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n}\right)^{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n}.$$

上式右端是和 $x_i(i=1,2,\cdots,n)$ 无关的常数。所以使上式等号成立的 x_i 值就使 $x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\cdots x_n^{\alpha_n}$ 取到最大值。而要这等式的等号成立也就是要上一个不等式的等号成立，所以有

$$\frac{x_1}{\alpha_1}=\frac{x_2}{\alpha_2}=\cdots=\frac{x_n}{\alpha_n}=\frac{c}{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n}.$$

II．由推广的定理一得：

$$\left(\frac{\beta_1 a_1 x_1^{\beta_1}}{\alpha_1}\right)^{\frac{\alpha_1}{\beta_1}}\left(\frac{\beta_2 a_2 x_2^{\beta_2}}{\alpha_2}\right)^{\frac{\alpha_2}{\beta_2}}\cdots\left(\frac{\beta_n a_n x_n^{\beta_n}}{\alpha_n}\right)^{\frac{\alpha_n}{\beta_n}}$$

$$\leqslant\left(\frac{a_1x_1^{\beta_1}+a_2x_2^{\beta_2}+\cdots+a_nx_n^{\beta_n}}{\frac{\alpha_1}{\beta_1}+\frac{\alpha_2}{\beta_2}+\cdots+\frac{\alpha_n}{\beta_n}}\right)^{\frac{\alpha_1}{\beta_1}+\frac{\alpha_2}{\beta_2}+\cdots+\frac{\alpha_n}{\beta_n}}$$

$$=\left(\frac{c}{\frac{\alpha_1}{\beta_1}+\frac{\alpha_2}{\beta_2}+\cdots+\frac{\alpha_n}{\beta_n}}\right)^{\frac{\alpha_1}{\beta_1}+\frac{\alpha_2}{\beta_2}+\cdots+\frac{\alpha_n}{\beta_n}}$$

即

$x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2}$

上式右端是和 $x_i(i=1,2,\cdots,n)$ 无关的常数. 所以只須使上式等号成立就行, 即

$$\frac{\beta_1 a_1 x_1^{\beta_1}}{\alpha_1}=\frac{\beta_2 a_2 x_2^{\beta_2}}{\alpha_2}=\cdots=\frac{\beta_n a_n x_n^{\beta_n}}{\alpha_n}.$$

12. 仿第 2 題左半不等式的証法,証明不等式

$$x_1^{x_1} x_2^{x_2} \cdots x_n^{x_n} \geqslant \left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\right)^{x_1+x_2+\cdots+x_n}$$

即得.